

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

00098

Term-End Examination

December, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-03(S) : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 7 is compulsory. Do any four questions from remaining questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.

1. (a) A continuous random variable X has the probability distribution function as

$$f(x) = 3x^2 ; 0 \leq x \leq 1$$

Find 'a' and 'b' such that

$$P(X \leq a) = P(X > a) \text{ and } P(X > b) = 0.05.$$

3

(b) If $z = \tan(y + ax) + (y - ax)^{\frac{3}{2}}$, find the value of $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 4

(c) Prove that the lines $2x + y - 1 = 0$, $x - y - 7 = 0$ and $x + 2y + 6 = 0$ pass through a common point. 3

2. (a) For the following table of values, find the correlation coefficient between the variables x and y : 4

x	2	3	4	5	6
y	4	7	9	10	13

(b) Evaluate $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$. 3

(c) The difference of two numbers is 100. The square of the larger one exceeds 5 times the square of the smaller one by an amount which is maximum. Find the numbers. 3

3. (a) Show that $\sin x (1 + \cos x)$ has a maximum at $x = \pi/3$. 4

(b) Three urns contain the following :

Urn I : 7 white and 3 black balls,

Urn II : 4 white and 6 black balls, and

Urn III : 2 white and 8 black balls.

Urn are chosen with respective probabilities 0.20, 0.60 and 0.20. Two balls are drawn without replacement from an urn chosen randomly. Find the probability that they are white. 3

(c) Solve : $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ 3

4. (a) Let X be a Poisson random variable such that $P(X = 3) = 2 P(X = 2)$. Find the standard deviation of X. 2

(b) If α and β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, find the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}$ and $\frac{1}{\beta}$. 3

- (c) Among 64 off-springs of a certain cross between guinea pigs, 34 were red, 10 were black and 20 were white. According to the genetic model these numbers should be in the ratio of 9 : 3 : 4. Are the data consistent with the model at 5% level of significance ? 5

[The following values of χ^2 may be useful :

$$\chi_{3, .05}^2 = 7.81, \chi_{2, .05}^2 = 5.99, \chi_{1, .05}^2 = 3.841]$$

5. (a) Find four numbers forming a GP in which the third term is greater than the first by 9 and the second term is greater than the fourth by 18. 3

- (b) Find the asymptotes of the curve 3

$$y^2(x - 1) - x^3 = 0.$$

- (c) For the normal probability distribution $N(1, 0.25)$, find

(i) $P(0.8 \leq X \leq 1.1)$,

(ii) $P(X > 1.1)$. 4

[You may find the following data useful :

$$\phi(0.8) = 0.7881, \phi(1.1) = 0.8643$$

$$\phi(0.2) = 0.5793, \phi(0.4) = 0.6554]$$

6. (a) Calculate the median and the mode for the following data :

5

Marks	No. of Students	Marks	No. of Students
10 – 20	2	50 – 60	25
20 – 30	6	60 – 70	20
30 – 40	12	70 – 80	10
40 – 50	18	80 – 90	7

- (b) If vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Find $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ and a unit vector perpendicular to both \mathbf{a} and \mathbf{b} .

3

- (c) Find the term free of x in the binomial expansion of $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$.

2

7. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.

$5 \times 2 = 10$

- (a) If $P(A) = 0.4$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0.6$ and the events A and B are mutually exclusive, then $p = 0.24$.

(b) For binomial coefficients $C(n, r)$,

$$\sum_{r=0}^n C(n, r) \text{ is } 2^n.$$

(c) The function $f(x) = \sin x$ is monotonic in the interval $[0, \pi]$.

(d) The domain of the real valued function $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{1+x}$ is the set of all real numbers.

(e) 45 samples of size 2 can be drawn from a population of size 10 without replacement.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-03(S) : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक संतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन फलन निम्न है

$$f(x) = 3x^2 ; 0 \leq x \leq 1$$

वह 'a' और 'b' ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$P(X \leq a) = P(X > a) \text{ और } P(X > b) = 0.05.$$

3

(ख) यदि $z = \tan(y + ax) + (y - ax)^{\frac{3}{2}}$, तब

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।} \quad 4$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $2x + y - 1 = 0$, $x - y - 7 = 0$ और $x + 2y + 6 = 0$ एक सार्व बिंदु से होकर गुजरती हैं। 3

2. (क) निम्नलिखित तालिका में दिए गए मानों के लिए, चरों x और y के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए : 4

x	2	3	4	5	6
y	4	7	9	10	13

(ख) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(ग) दो संख्याओं का अंतर 100 है। इनमें से बड़ी संख्या का वर्ग छोटी संख्या के वर्ग के पाँच गुना से अधिक है और यह अंतर अधिकतम है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए। 3

3. (क) दिखाइए कि $\sin x (1 + \cos x)$, $x = \pi/3$ पर उच्चिष्ठ है।

4

- (ख) निम्नलिखित तीन कलशों में क्रमशः

कलश I : 7 सफ़ेद तथा 3 काली गेंदे,

कलश II : 4 सफ़ेद तथा 6 काली गेंदे, और

कलश III : 2 सफ़ेद तथा 8 काली गेंदे हैं।

कलशों को क्रमशः प्रायिकताएँ 0.20, 0.60 और 0.20 से चुना जाता है। एक कलश को यादृच्छया चुना गया और उसमें से दो गेंदे प्रतिस्थापन के बिना निकाली गईं। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंदे सफ़ेद हैं।

3

- (ग) हल कीजिए :

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

3

4. (क) मान लीजिए X एक प्वासॉन यादृच्छिक चर है, जहाँ $P(X = 3) = 2 P(X = 2)$ । X का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

2

- (ख) यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हों। तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}$ और $\frac{1}{\beta}$ हैं।

3

(ग) गिनी-पिग के बीच सहवास से पैदा हुए 64 बच्चों में से 34 लाल, 10 काले और 20 सफ़ेद बच्चे पैदा हुए। आनुवंशिक (जेनेटिक) निदर्श के अनुसार इन संख्याओं का अनुपात 9 : 3 : 4 होना चाहिए। क्या 5% सार्थकता स्तर पर ये आँकड़े निदर्श के सुसंगत हैं ?

5

[χ^2 के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं :

$$\chi_{3, .05}^2 = 7.81, \chi_{2, .05}^2 = 5.99, \chi_{1, .05}^2 = 3.841]$$

5. (क) वे चार संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनसे एक ऐसी गुणोत्तर श्रेढ़ी बने जिसका तीसरा पद पहले पद से 9 अधिक हो और दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

3

(ख) वक्र $y^2(x-1) - x^3 = 0$ की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

3

(ग) प्रसामान्य प्रायिकता बंटन $N(1, 0.25)$ के लिए

(i) $P(0.8 \leq X \leq 1.1)$,

(ii) $P(X > 1.1)$

ज्ञात कीजिए।

[निम्नलिखित आँकड़े आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं : 4

$$\phi(0.8) = 0.7881, \phi(1.1) = 0.8643$$

$$\phi(0.2) = 0.5793, \phi(0.4) = 0.6554]$$

6. (क) निम्नलिखित आँकड़ों की माधिका और बहुलक का परिकलन कीजिए :

5

अंक	छात्रों की संख्या	अंक	छात्रों की संख्या
10 – 20	2	50 – 60	25
20 – 30	6	60 – 70	20
30 – 40	12	70 – 80	10
40 – 50	18	80 – 90	7

- (ख) यदि सदिश $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ और $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ तो, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ और एकक सदिश जो दोनों सदिशों \mathbf{a} और \mathbf{b} पर लंब हो, ज्ञात कीजिए ।

3

- (ग) $\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ के द्विपद प्रसार में x से मुक्त पद ज्ञात कीजिए ।

2

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए ।

$5 \times 2 = 10$

- (क) यदि $P(A) = 0.4$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0.6$ और घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी हों, तो $p = 0.24$.

(ख) द्विपद गुणांक $C(n, r)$ के लिए $\sum_{r=0}^n C(n, r) = 2^n$.

(ग) अंतराल $[0, \pi]$ में फलन $f(x) = \sin x$ एकदिष्ट है ।

(घ) वास्तविक मान फलन $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{1+x}$ का प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है ।

(ङ) आमामप 10 वाली समष्टि से प्रतिस्थापन के बिना आमामप 2 वाले 45 प्रतिदर्श प्राप्त किए जा सकते हैं ।
