MASTER OF ARTS (ECONOMICS)

Term-End Examination

December, 2014

MECE-001 : ECONOMETRIC METHODS

Time : 3 hours *Maximum Marks :* ***100***

***Note : Section A** answer **any** 2 questions.* (2x20=40 marks)
***Section B** answer **any** 5 questions.* (5x12=60 marks)

SECTION - A

1. The relationship between variables Y and X_1, X_2 is linear - i.e. $Y=\alpha+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\varepsilon$. When you run an OLS regression to estimate the three parameters - i.e. β_1, β_2 and α - your estimated $\hat{\beta}_1$ and $\hat{\beta}_2$ are both 0. Prove that the coefficient of determination of your regression (i.e. R^2) *must* be 0. **20**

2. The relationship between two variables, Y and X, is as follows : $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$. Assume that all the classical assumptions of OLS are satisfied. Your data set consists of 6 observations and is as follows : **20**

Y	4	2	0	3	3	3
X	1	1	1	2	2	2

(a) Using an OLS regression, obtain estimates of α and β.

(b) Provide an unbiased estimate of σ^2, the variance of the error term ε.

3. The relationship between variables Y and X is linear - i.e. $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$. Assume, however, that the classical homoscedasity assumption is violated. Specifically, for the first n_1 observations, the variance of the error term ε is σ_1^2 whereas for the remaining n_2 observations, the variance of the error term ε is σ_2^2. Suppose you estimate α and β by OLS. **20**

Let $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ be OLS estimators of α and β.

(a) Show that $\hat{\beta}$ is an unbiased estimator of β

$$\left(\text{i.e. } E\left(\hat{\beta}\right) = \beta\right).$$

(b) Show that the variance of $\hat{\beta}$ is as follows :

$$\left[\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2\ \sigma_1^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_i^2\ \sigma_2^2\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_i^2\right]^2$$

4. Let the dependent variable y_i assume two values : 0 and 1. Let x_i denote the set of independent variables. You wish to study the impact of x_i on y_i and build the following (logit) model : **20**

Prob $(y_i = 1 \mid x_i) = \exp(x_i\beta)/[1 + \exp(x_i\beta)]$. You obtain a random sample of n-observations from the population where observation 1 is (y_1, x_1), observation 2 is (y_2, x_2), and so on.

(a) You wish to estimate β using the method of maximum likelihood. Derive the sample log-likelihood function.

(b) From the first order condition, demonstrate that the estimate $\hat{\beta}$ satisfies the following condition :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}\right]x_i = 0 .$$

SECTION - B

5. You are given a random sample of $n=100$ observations from a population. The sample mean is 25. The mean of the population is μ and the standard deviation σ is given to be 25. Outline how you would construct the confidence interval for μ with 0.95 confidence level. 12

6. The relationship between variables Y and X is linear - i.e. $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$. State the classical assumptions for ordinary least squares (OLS). Let $\hat{\beta}$ denote the OLS estimator of β. Given the classical assumptions, demonstrate that $\hat{\beta}$ is BLUE. 12

7. You have time series data from two periods. The models for the two periods are as follow : 12
   (a) $Y_t=\alpha_1+\alpha_2 X_t+\varepsilon_t$, $t=1, 2, ..., n_1$ for period 1 and
   (b) $Y_t=\beta_1+\beta_2 X_t+v_t$, $t=1, 2, ..., n_2$ for period 2.

   Outline how one can do a Chow test to check whether there is a break across periods. Ensure that you write down the test statistic of the Chow test and specify its distribution under the null of structural stability.

8. Assume that the true model in deviation form is $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ and let the variance of ε_i be σ_ε^2. Assume that the variable x^*, instead of x, is obtained in the measurement process where $x_i^* = x_i + v_i$. Assume that the variance of v_i is σ_v^2 and $\text{cov}(x_i, v_i) = 0$. You run a regression with y as the dependent variable and a constant and x^* as independent variables. Let $\hat{\beta}$ be the OLS estimator of β. 12

Prove that the probability limit of $\hat{\beta}$ is less than β when $\beta > 0$.

9. Consider the Koyck distributed lag model : $Y_t = \beta(X_t + \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + \ldots\ldots) + u_t$, where $|\phi| < 1$ and u_t has mean 0 and is independent of the regressors. 12

   (a) What is the short-run multiplier (i.e. immediate response of Y_t to a unit change in X_t) ?

   (b) Show that the Koyck model can be rewritten to assume the following form : $Y_t = \phi Y_{t-1} + \beta X_t + (u_t - \phi u_{t-1})$

   (c) Will an OLS regression of Y_t on Y_{t-1} and X_t provide an unbiased estimate of the model's parameters, β and ϕ ? Discuss.

10. You have time series data for two variables : Y_t and X_t. The model that applies for the first T_1 periods is as follows : $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + u_t$, $t = 1, 2, \ldots\ldots, T_1$. For the remaining T_2 periods, the model that applies is as follows : 12

$$Y_t = \alpha + \theta_1 X_t + \theta_2 X_t^2, \; t = T_1 + 1, \ldots\ldots, T_1 + T_2.$$

(a) Using the dummy variable approach, show how the two models can be combined into a single model that applies for all the $T_1 + T_2$ periods ?

(b) Outline how you would test whether the data are poolable ? Ensure that you specify the distribution of the test statistic under the null of data poolability.

11. Consider the following simple model of a market where Q_s denotes quantity supplied, Q_d denotes quantity demanded, and P is price. 12

$Q_d = \alpha_1 + \beta_1 P + r_1 Z_1 + r_2 Z_2 + u_1$

$Q_s = \alpha_2 + \beta_2 P + u_2$

$Q_d = Q_s$

Z_1, Z_2 are exogenous variables.

(a) Using the order condition, check whether the Q_d equation is identified.

(b) You wish to estimate the parameters α_2 and β_2 in the Q_s equation. Can these parameters be estimated by running a regression of (equilibrium) quantity on a constant and (equilibrium) price ? Discuss.

(c) Very briefly outline how you would estimate α_2 and β_2 by 2SLS ?

एम.ई.सी.ई.-001

एम.ए. (अर्थशास्त्र)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

एम.ई.सी.ई.-001 : अर्थमित्ति विधियाँ

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *भाग-क से **किन्हीं दो** प्रश्नों और **भाग-ख** से **किन्हीं पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

भाग - क

1. Y और X_1, X_2 चरों के बीच का संबंध रैखिक-अर्थात् $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ है। जब आप तीन प्राचलों-अर्थात् β_1, β_2 और α को आकलित करने के लिए ओ.एल.एस. (OLS) समाश्रयण करते हैं तो आपके आकलित $\hat{\beta}_1$ और $\hat{\beta}_2$ दोनों 0 हैं। सिद्ध कीजिए कि आपके समाश्रयण का निर्धारण गुणांक (अर्थात् R^2) *निश्चित रूप* से 0 हो। **20**

2. दो चरों Y और X, के बीच का संबंध इस प्रकार है : $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$। मान लीजिए कि ओ.एल.एस. की सभी क्लासिकी अवधारणाएँ संतुष्ट हैं। आपके आँकड़ें सेट में सम्मिलित 6 प्रेक्षण इस प्रकार हैं : **20**

Y	4	2	0	3	3	3
X	1	1	1	2	2	2

(a) ओ.एल.एस. समाश्रयण का प्रयोग करते हुए, α और β के आकलक प्राप्त कीजिए।

(b) σ^2 का अनभिनत आकलक, त्रुटि चर ε का प्रसरण प्रदान कीजिए।

3. चर Y और X के बीच का संबंध रैखिक-अर्थात् $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ है। मान लीजिए, हालाँकि, क्लासिकी समविचालिता अवधारणा का पालन नहीं किया गया। विशेष रूप से प्रथम n_1 प्रेक्षणों के लिए, त्रुटि चर ε का प्रसरण σ_1^2 है जबकि शेष n_2 प्रेक्षणों के लिए त्रुटि चर ε का प्रसरण σ_2^2 है। मान लीजिए कि आप α और β को ओ.एल.एस. द्वारा आकलित करते हैं। मान लीजिए $\hat{\alpha}$ और $\hat{\beta}$, α और β के ओ.एल.एस. (OLS) आकलक हैं। 20

(a) दर्शाइए कि $\hat{\beta}$, β का अनभिनत आकलक

$$\left(\text{अर्थात्}\ E\left(\hat{\beta}\right) = \beta\right)$$

(b) दर्शाइए कि $\hat{\beta}$ का प्रसरण इस प्रकार है :

$$\left[\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2\ \sigma_1^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_i^2\ \sigma_2^2\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_i^2\right]^2$$

4. मान लीजिए कि पराश्रित चर y_i के दो मान 0 और 1 हैं। मान लीजिए कि x_i, स्वतंत्र चरों के सेट को दर्शाता है। आप y_i पर x_i के प्रभाव और निम्नलिखित लॉजिट (logit) मॉडल बनाना चाहते हैं : Prob $(y_i = 1 \mid x_i) = \exp(x_i\beta)/[1 + \exp(x_i\beta)]$ आप समष्टि से n प्रेक्षणों का यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त करते हैं जहाँ प्रेक्षण 1, (y_1, x_1) और प्रेक्षण 2, (y_2, x_2) है और इसी तरह आगे भी। 20

(a) आप अधिकतम संभाविता विधि (maximum likelihood method) के प्रयोग से β को आकलित करना चाहते हैं। प्रतिदर्श लॉग-संभाविता फलन (log-likelihood function) की व्युत्पत्ति कीजिए।

(b) प्रथम कोटि शर्त से, प्रदर्शित कीजिए कि आकलक $\hat{\beta}$, निम्नलिखित शर्त को संतुष्ट करता है :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}\right]x_i = 0 .$$

भाग - ख

5. आपके पास एक समष्टि से $n = 100$ प्रेक्षणों के यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। प्रतिदर्श माध्य 25 है। समष्टि का माध्य μ और मानक विचलन $\sigma = 25$ है। रेखांकित कीजिए कि आप μ के लिए विश्वास्यता अंतराल कैसे बनायेंगे जहाँ 0.95 विश्वास्यता स्तर हो। 12

6. चर Y और X के बीच का संबंध रैखिक-अर्थात् $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ है। साधारण न्यूनतम वर्ग (ओ.एल.एस.) के लिए क्लासिकी अवधारणा व्यक्त कीजिए। मान लीजिए कि $\hat{\beta}$, β के ओ.एल.एस. आकलक को दर्शाता है। क्लासिकी अवधारणाओं को ध्यान में रख कर, प्रदर्शित कीजिए कि $\hat{\beta}$, ब्लू (BLUE) है। 12

7. आपके पास दो समयावधियों के काल शृंखला आँकड़ें हैं। दो समयावधियों के लिए मॉडल इस प्रकार हैं : **12**

(a) समयावधि 1 के लिए $Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ..., n_1$ और

(b) समयावधि 2 के लिए $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t$, $t = 1, 2, ..., n_2$

संक्षेप में बताइए कि चाओ (Chow) परीक्षण का प्रयोग यह जाँचने के लिए कैसे किया जा सकता है कि दोनों समयावधियों में अंतर (break) है। चाओ (Chow) परीक्षण का परीक्षण प्रतिदर्शज अवश्य लिखें और संरचनागत स्थिरता के शून्य परिकल्पना के अंतर्गत इसके बंटन को विशेष रूप से दर्शाएँ।

8. मान लीजिए कि विचलन रूप में सही मॉडल $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ है और ε_i का प्रसरण σ_ε^2 है। मान लीजिए कि x, की बजाय चर x^*, की प्राप्ति मापन प्रक्रिया में की जाती है जहाँ $x_i^* = x_i + v_i$ । मान लीजिए कि v_i का प्रसरण σ_v^2 और $\text{cov}(x_i, v_i) = 0$ है। आप पराश्रित चर y को एक स्थिरांक और स्वतंत्र चर x^* के साथ समाश्रयण कीजिए। मान लीजिए कि $\hat{\beta}$, β का ओ.एल.एस. आकलक है। **12**

सिद्ध कीजिए कि $\hat{\beta}$ की प्रायिकता सीमा β से निम्न है जब $\beta > 0$ ।

9. कोयेस्क (Koyck) बंटित पश्चता मॉडल पर विचार कीजिए : **12**

$Y_t = \beta(X_t + \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + ...) + u_t$, जहाँ $|\phi| < 1$ और u_t का माध्य 0 है और समाश्रयियों से स्वतंत्र है।

(a) अल्पकालिक गुणक (अर्थात् X_t में यूनिट परिवर्तन के प्रति Y_t की तात्कालिक प्रतिक्रिया) क्या है?

(b) दर्शाइए कि कोयेस्क (Koyck) मॉडल को निम्नलिखित स्वरूप में मानने के लिए पुन: लिखा जा सकता है।

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \beta\ X_t + (u_t - \phi u_{t-1})$$

(c) क्या Y_{t-1} और X_t पर Y_t का ओ.एल.एस. समाश्रयण, मॉडल के प्राचल, β और ϕ के अनभिनत आकलन प्रदान करेगा? चर्चा कीजिए।

10. दो चरों Y_t और X_t के लिए, आपके पास काल श्रृंखला आँकड़ें हैं। प्रथम T_1 कालों (periods) के लिए लागू मॉडल है : **12**

$Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + u_t$, $t = 1, 2, ..., T_1$. शेष T_2 कालों के लिए लागू मॉडल है : $Y_t = \alpha + \theta_1 X_t + \theta_2 X_t^2$, $t = T_1 + 1, ..., T_1 + T_2$.

(a) डमी चर उपागम के प्रयोग से दर्शाइए कि सभी $T_1 + T_2$ कालों के लिए लागू एकल मॉडल में दो मॉडलों को कैसे एक साथ जोड़ा जा सकता है?

(b) संक्षेप में बताइए कि आप परीक्षण कैसे करेंगे कि क्या आँकड़ें एकत्र किए जा सकते हैं? आँकड़ा प्रायिकता - शून्य के अंतर्गत परीक्षण प्रतिदर्शज के बंटन को विशेष रूप से दर्शाएं।

11. बाज़ार के निम्नलिखित साधारण मॉडल पर विचार कीजिए जहाँ Q_s, आपूर्तित परिमात्रा को और Q_d, माँग की गई परिमात्रा को दर्शाता है और जहाँ P, मूल्य है। **12**

$$Q_d = \alpha_1 + \beta_1 P + r_1 Z_1 + r_2 Z_2 + u_1$$

$$Q_s = \alpha_2 + \beta_2 P + u_2$$

$$Q_d = Q_s$$

Z_1, Z_2 बाह्य चर हैं।

(a) कोटि शर्त के प्रयोग से, जाँच कीजिए कि क्या Q_d समीकरण की पहचान कर ली गई है।

(b) आप Q_s समीकरण में प्राचल α_2 और β_2 को आकलित करना चाहते हैं। क्या इन प्राचलों को स्थिर एवं (साम्य) कीमत पर (साम्य) परिमात्रा के समाश्रयण से आकलित किया जा सकता है? चर्चा कीजिए।

(c) संक्षेप में बताइए कि आप 2SLS द्वारा α_2 और β_2 को आकलित कैसे करेंगे?