01282

No. of Printed Pages : 12

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any* ***five*** *questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Obtain a second degree polynomial approximation to $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ over the interval [0, 1] by means of the Taylor series expansion about $x = 0$. Obtain a bound of the error. *2*

(b) Use the Lagrange's interpolation formula to calculate f(3) from the following table : *3*

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

(c) Using Gauss – Jordan method with pivoting, solve the system of equations : 5

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

2\. (a) The value of $\sqrt{a}$ is being obtained using the iteration scheme $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)$.

Find the order of convergence of the method. 5

(b) A particle is moving along a straight line. The displacement x of the particle at some time instances t are given below :

t	0	1	2	3	4
x	5	8	12	17	26

Find the velocity and acceleration of the particle at t = 4. 5

3. (a) Find the solution of the system of equations :

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

using three iterations of Gauss – Seidel method. Assume the initial approximation as $x_1^{(0)} = 0{\cdot}3$, $x_2^{(0)} = 0{\cdot}6$, $x_3^{(0)} = 0{\cdot}3$. Find the iteration matrix and hence find the rate of convergence of the method. *6*

(b) Evaluate $\int_1^5 \frac{dx}{1 + x^2}$ using Simpson's rule with h = 2 and 1. Improve the result using Romberg integration. *4*

4. (a) For the following data, interpolate at $x = 0{\cdot}25$ using forward difference polynomial : *5*

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
f(x)	1·40	1·56	1·76	2·00	2·28

(b) Estimate the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

using the Gerschgorin bound. Draw a rough sketch of the region where the eigenvalues lie. *5*

5. (a) For the method

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \{-3 f(x_0) + 4 f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\}$$

determine the optimal value of h based on the criteria :

max | Truncation error | = max | Round-off error |

when $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $1 \le x \le 2$ and the maximum round-off error in evaluating f(x) is 0·005. *6*

(b) Locate the smallest negative root in the magnitude of the equation $x^2 - x - 1 = 0$ in an interval of length 1. Taking the end points of this interval as the initial approximation x_0, x_1 perform two iterations using Regula – Falsi method. *4*

6. (a) The initial value problem

$$y' = t^2 + y, \quad y(1) = 2$$

is given. Find $y(1\cdot4)$ for two values of h i.e. $h = 0\cdot2$ and $h = 0\cdot1$, using Euler's method and extrapolate the value of $y(1\cdot4)$. *5*

(b) Locate the negative real root of the smallest magnitude, in an interval of length one unit of the equation $3x^3 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$. Taking the mid-point of this interval as the initial approximation iterate twice using the Birge – Vieta method. *5*

7. (a) The following data values for finding an approximation to $f''(0\cdot3)$ are given :

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
f(x)	0·091	0·155	0·182	0·171	0·130

Using the central difference formula of $O(h^2)$, find approximations to $f''(0\cdot3)$ with $h = 0\cdot2$ and $h = 0\cdot1$. Hence, find an improved estimate using extrapolation. *5*

(b) Determine the spacing h in a table of equally spaced values for the function $f(x) = (2 + x)^4$, $1 \le x \le 2$, so that quadratic interpolation in this table satisfies $|\text{error}| \le 10^{-6}$. 3

(c) Using synthetic division find $f'(3)$ where $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

1. (क) $x = 0$ के प्रति अंतराल $[0, 1]$ में $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ का द्वितीय घात बहुपद सन्निकटन टेलर श्रेणी प्रसार द्वारा प्राप्त कीजिए । त्रुटि का परिबंध भी ज्ञात कीजिए । *2*

(ख) लग्रांज अंतर्वेशन सूत्र द्वारा निम्नलिखित तालिका (आँकड़ों) से $f(3)$ परिकलित कीजिए : *3*

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

(ग) कीलकन द्वारा गाउस – जॉर्डन विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल प्राप्त कीजिए : 5

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

2. (क) पुनरावृत्ति योजना $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)$ द्वारा $\sqrt{a}$ का मान प्राप्त किया गया । विधि की अभिसरण कोटि ज्ञात कीजिए । 5

(ख) एक कण सीधी रेखा में गतिमान है । कुछ समयों t पर कण का विस्थापन x नीचे दिया गया है :

t	0	1	2	3	4
x	5	8	12	17	26

t = 4 पर कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए । 5

3. (क) प्रारंभिक सन्निकटन $x_1^{(0)} = 0{\cdot}3$, $x_2^{(0)} = 0{\cdot}6$, $x_3^{(0)} = 0{\cdot}3$ मान कर गाउस – सीडल विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ प्रयोग करके समीकरण निकाय

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

का हल ज्ञात कीजिए । विधि की पुनरावृत्त आव्यूह और अभिसरण दर ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) $h = 2$ और 1 के लिए सिम्प्सन नियम द्वारा

$$\int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$$ का मान ज्ञात कीजिए । रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा परिशुद्धता में सुधार कीजिए । *4*

4. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, अग्रांतर बहुपद का प्रयोग करके $x = 0{\cdot}25$ पर अंतर्वेशन कीजिए : *5*

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
f(x)	1·40	1·56	1·76	2·00	2·28

(ख) गर्शगोरिन परिबंध से आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

के आइगनमान आकलित कीजिए । उस प्रदेश का ग्राफ (कच्चा लेखाचित्र) बनाइए जहाँ आइगनमान स्थित हैं । 5

5. (क) विधि

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \{-3\, f(x_0) + 4\, f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\}$$

के लिए निकष

max | रुंडन-त्रुटि | = max | निकटन-त्रुटि |

को लागू करके h का इष्टतम मान ज्ञात कीजिए जबकि $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $1 \le x \le 2$ और f(x) के आकलन में अधिकतम निकटन-त्रुटि 0·005 है । 6

(ख) लम्बाई 1 वाले अंतराल में समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ का परिमाण में सबसे छोटा ऋणात्मक मूल ज्ञात कीजिए । इस अंतराल के अंत्य बिंदुओं को आदि सन्निकटन x_0, x_1 मानकर मिथ्या-स्थिति (रेगुला-फॉल्सी) विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 4

6. (क) ऑयलर विधि द्वारा h के दो मानों अर्थात् $h = 0{\cdot}2$ और $h = 0{\cdot}1$ लेकर आदि मान समस्या

$$y' = t^2 + y, \quad y(1) = 2$$

के लिए $y(1{\cdot}4)$ ज्ञात कीजिए और $y(1{\cdot}4)$ के मान का बहिर्वेशन कीजिए । 5

(ख) समीकरण $3x^3 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$ के लिए एकक लम्बाई वाले अंतराल में निम्नतम परिमाण वाला ऋणात्मक वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए । इस अंतराल के मध्य-बिंदु को प्रारंभिक सन्निकटन मान कर बर्ज – विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 5

7. (क) $f''(0{\cdot}3)$ का सन्निकटन करने के लिए निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं :

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
f(x)	0·091	0·155	0·182	0·171	0·130

$O(h^2)$ के केन्द्रीय अंतर सूत्र का प्रयोग करके $h = 0{\cdot}2$ और $h = 0{\cdot}1$ के लिए $f''(0{\cdot}3)$ का सन्निकटन ज्ञात कीजिए । अतः, बहिर्वेशन विधि से प्राप्त मान में सुधार कीजिए । 5

(ख) फलन $f(x) = (2 + x)^4, \ 1 \le x \le 2$ के समदूरी मानों की तालिका से एक ऐसा अंतर h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका में द्वितीय घात अंतर्वेशन | त्रुटि | $\le 10^{-6}$ को संतुष्ट करता हो । *3*

(ग) सांश्लेषिक विभाजन का प्रयोग करके $f'(3)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1.$ *2*