No. of Printed Pages : 8

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions out of the remaining questions no. 2 – 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example. *5×2=10*

(a) The differential equation

$$(y \ ln\ x - 1)\, y\, dx = x\, dy$$

is a linear differential equation of first order and first degree.

(b) $y = 0$, is the singular solution of the differential equation $27y - 8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$.

(c) The differential equation $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ has a unique solution.

(d) The complete integral of

$$y^2z\frac{\partial z}{\partial x} - x^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y \text{ is}$$

$$\phi(x^2 + y^2,\ y^2 + z^2) = 0.$$

(e) The general solution of the equation

$$y = xp + \frac{1}{p}, \text{ where } p = \frac{dy}{dx} \text{ is } y = kx + \frac{1}{k}$$

(k being a constant).

2. (a) Solve the simultaneous differential equation : *3*

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

(b) Solve the differential equation : *3*

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

(c) Solve the following differential equation by reducing it to normal form using change of dependent variable : *4*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)y = e^{\frac{1}{2}(x^2+2x)}$$

3. (a) Solve the differential equation : *3*

$$(D^4 - a^4)\,y = x^4 + \sin bx,$$

where a and b are constants and $D \equiv \frac{d}{dx}$.

(b) Solve the following partial differential equation using Jacobi's method : *3*

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z = 1$$

(c) By the method of variation of parameters, solve the following differential equation : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$

4. (a) Uranium disintegrates at a rate proportional to the amount present at any instant. If m_1 and m_2 grams of uranium are present at time t_1 and t_2, respectively, show that half life of uranium is $(t_1 - t_2)\ ln\ 2 / ln\ (m_1/m_2)$. 4

(b) Solve the partial differential equation : 3

$$x^2p + y^2q = z^2$$

(c) Apply Charpit's method to solve the following differential equation : 3

$$p\ (1 + q^2) = q\ (z - a)$$

5. (a) Solve the following differential equation : 4

$$(D - 3D' - 2)^2\ z = 2\ e^{2x} \sin\ (2y + x)$$

(b) Solve the differential equation : 4

$$(1 + y^2)\ dx - (\tan^{-1} y - x)\ dy = 0$$

(c) Classify the following differential equation into elliptic, parabolic or hyperbolic equations : 2

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{y^2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^2}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

6. (a) Test the following differential equation for exactness :

$$[\cos x \tan y + \cos (x + y)]\, dx + [\sin x \sec^2 y + \cos (x + y)]\, dy = 0$$

Hence solve it. *3*

(b) The motion of a certain spring-mass system is governed by the differential equation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{8}\frac{du}{dt} + u = 0$$

where u is measured in metres and t in seconds. If $u(0) = 2$ and $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = 0$ determine the subsequent motion. Also determine the time at which the mass first passes through the equilibrium position. *4*

(c) Solve : *3*

$$(2\sqrt{xy} - y)\, dx - x\, dy = 0$$

7. (a) Solve the differential equation : *4*

$$(D^2 - 6DD' + 9D'^2)\, z = 12x^2 + 36xy$$

(b) Using the method of product solution solve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + u$$

when $u(x, 0) = 6\, e^{-3x}$. *4*

(c) Using the method of undetermined coefficients write the form of particular integral of the equation

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}.$$ *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

   (क) अवकल समीकरण $(y \, ln \, x - 1) y \, dx = x \, dy$ प्रथम घात और प्रथम कोटि वाला रैखिक अवकल समीकरण है ।

   (ख) $y = 0$, अवकल समीकरण $27y - 8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ का विचित्र हल है ।

   (ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ का अद्वितीय हल है ।

(घ) समीकरण $y^2z\frac{\partial z}{\partial x} - x^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y$ का पूर्ण समाकल $\phi(x^2 + y^2,\ y^2 + z^2) = 0$ है ।

(ङ) समीकरण $y = xp + \frac{1}{p}$, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$ का व्यापक हल $y = kx + \frac{1}{k}$ है, जहाँ k एक अचर है ।

2. (क) युगपत अवकल समीकरण

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

को हल कीजिए । *3*

(ख) अवकल समीकरण

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

को हल कीजिए । *3*

(ग) स्वतंत्र चर परिवर्तन से निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्रसामान्य रूप में समानीत करके हल कीजिए : *4*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)y = e^{\frac{1}{2}(x^2+2x)}$$

3. (क) अवकल समीकरण

$$(D^4 - a^4)\,y = x^4 + \sin bx$$

को हल कीजिए, जहाँ a और b अचर हैं और $D \equiv \frac{d}{dx}$. *3*

(ख) जैकोबी विधि द्वारा निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए : *3*

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z = 1$$

(ग) प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$

4. (क) यूरेनियम किसी भी समय उपस्थित मात्रा के समानुपाती दर से विघटित होता है । यदि समय t_1 और t_2 पर क्रमशः m_1 और m_2 ग्राम यूरेनियम उपस्थित हो, तो दिखाइए कि यूरेनियम की अर्ध-आयु $(t_1 - t_2)\, ln\, 2 / ln\, (m_1/m_2)$ है । 4

(ख) आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2p + y^2q = z^2$$

को हल कीजिए । 3

(ग) चार्पिट विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 3

$$p\,(1 + q^2) = q\,(z - a)$$

5. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$(D - 3D' - 2)^2\, z = 2\, e^{2x} \sin\,(2y + x)$$

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

(ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण को दीर्घवृत्तीय, परवलयिक अथवा अतिपरवलयिक समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए : 2

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{y^2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^2}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

6. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण की जाँच यथार्थता के लिए कीजिए :

$$[\cos x \tan y + \cos (x + y)]\, dx + [\sin x \sec^2 y + \cos (x + y)]\, dy = 0$$

अतः इसे हल कीजिए । 3

(ख) एक कमानी-द्रव्यमान तंत्र की गति अवकल समीकरण $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{8}\frac{du}{dt} + u = 0$ द्वारा नियंत्रित है, जहाँ u मीटर में और t सेकण्ड में मापा गया है । यदि $u(0) = 2$ और $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = 0$ हो तो तंत्र की उत्तरगामी गति ज्ञात कीजिए । वह समय भी ज्ञात कीजिए जबकि द्रव्यमान सबसे पहली बार साम्यावस्था से गुज़रता है । 4

(ग) हल कीजिए : 3

$$(2\sqrt{xy} - y)\, dx - x\, dy = 0$$

7. (क) अवकल समीकरण

$$(D^2 - 6DD' + 9D'^2)\, z = 12x^2 + 36xy$$

को हल कीजिए । 4

(ख) गुणन हल विधि का प्रयोग करके समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + u,$$

जहाँ $u(x, 0) = 6\, e^{-3x}$ है, को हल कीजिए । 4

(ग) अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा समीकरण

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}$$

के विशेष समाकल का रूप लिखिए । 2