No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions out of the remaining questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer. *10*

(a) $(\sin x)^{\tan^2 x}$ is in the ∞^0 form as $x \to \frac{\pi}{2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$ does not exist.

(c) If $z = \tan^{-1} \frac{x^3+y^3}{x+y}$, then

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z.$$

(d) If $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, then

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-\pi^2}{8} \text{ at } t = 0.$$

(e) The region between the parabolas $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ is Type-I only.

2. (a) Show that the limit of the following function $f(x, y)$ exists at origin but the repeated limits do not exist where *5*

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

(b) Find the volume within the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ between the planes $y + z = b^2$ and $z = 0$, where $b > a$. *5*

3. (a) Evaluate the following : *3*

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

(b) Let $x = e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $y = 2e_1 + 4e_2 + 9e_3$ where e_1, e_2, e_3 are unit vectors. Find $|x|$ and $|y|$. *2*

(c) Expand $x^2y + 3y - 2$ in powers of $x - 1$ and $y + 2$. *5*

4. (a) Evaluate $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ over the rectangle $R = [0, 1; 0, 1]$, where

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$ 6

(b) Check whether the following functions are functionally dependent on $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$: 4

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x}, \; g(x, y) = xy$$

5. (a) Define Inverse Function Theorem. Determine whether the map $F(x, y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$ is locally convertible at (1, 2). 4

(b) Suppose W is the region described by $0 \le r \le 1, \; 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le \phi \le \pi$. Then integrate the function $f(r, \theta, \phi) = e^{r^3} \cos \phi \cos \theta$ over W. 4

(c) Evaluate f_{xy} at a point (x, y) for the function f defined by

$$f(x, y) = x^5 + 10x^3y^3 + 8y^4.$$

Using Schwartz's theorem obtain f_{yx} at the point (x, y). 2

6. (a) Check whether the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

has all the directional derivatives at (0, 0). *4*

(b) Evaluate : *3*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

(c) Find the local extreme values of $f(x, y) = e^{xy}$, if any. *3*

7. (a) Find a polynomial f(x) of degree 2 that satisfies $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 2$. *3*

(b) Find the domain, the range and the level surfaces of the function

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}.$$ *5*

(c) Check whether the function

$F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$ is conservative. *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *10*

   (क) $x \to \frac{\pi}{2}$ होने पर $(\sin x)^{\tan^2 x}$, ∞° प्रकार में होगा ।

   (ख) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$ का अस्तित्व नहीं होगा ।

   (ग) यदि $z = \tan^{-1} \frac{x^3+y^3}{x+y}$, तब

   $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z.$$

(घ) यदि $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, तब $t = 0$ पर $\frac{dz}{dt} = \frac{-\pi^2}{8}$.

(ङ) परवलयों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच का प्रदेश केवल टाइप-I का होता है ।

2. (क) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन $f(x, y)$ की सीमा का अस्तित्व मूल-बिन्दु पर होता है लेकिन वहाँ पुनरावृत्ति सीमाओं का अस्तित्व नहीं होता : *5*

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}.$$

(ख) समतलों $y + z = b^2$ और $z = 0$, जहाँ $b > a$ के बीच स्थित बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ का आयतन ज्ञात कीजिए । *5*

3. (क) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : *3*

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

(ख) मान लीजिए

$x = e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $y = 2e_1 + 4e_2 + 9e_3$

जहाँ e_1, e_2, e_3 मात्रक सदिश हैं । $|x|$ और $|y|$ ज्ञात कीजिए । *2*

(ग) $x - 1$ और $y + 2$ की घातों में $x^2y + 3y - 2$ का विस्तार कीजिए । *5*

4. (क) आयत $R = [0, 1;\ 0, 1]$ पर $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y\ , & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0\ , & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$ 6

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ पर फलनिकतः आश्रित हैं या नहीं : 4

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x},\ g(x, y) = xy$$

5. (क) प्रतिलोम फलन प्रमेय परिभाषित कीजिए । बताइए कि फलन $F(x, y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$, $(1, 2)$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है या नहीं । 4

(ख) मान लीजिए W, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$ द्वारा दिया गया प्रदेश है । तब W पर फलन $f(r, \theta, \phi) = e^{r^3} \cos\phi \cos\theta$ को समाकलित कीजिए । 4

(ग) $f(x, y) = x^5 + 10x^3y^3 + 8y^4$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए बिन्दु (x, y) पर f_{xy} का मूल्यांकन कीजिए । श्वार्त्ज़ प्रमेय द्वारा बिन्दु (x, y) पर f_{yx} प्राप्त कीजिए । 2

6. (क) जाँच कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के $(0, 0)$ पर सभी दिक् अवकलज होते हैं । 4

(ख) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ग) $f(x, y) = e^{xy}$ के स्थानिक चरम मान, यदि कोई हों, तो ज्ञात कीजिए । 3

7. (क) घात 2 का ऐसा बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जो $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 2$ को संतुष्ट करता हो । 3

(ख) फलन $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ के प्रांत, परिसर और स्तर पृष्ठ ज्ञात कीजिए । 5

(ग) जाँच कीजिए कि फलन

$F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$ संरक्षी है या नहीं । 2