02802

No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from Q. No. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Express the permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

as a product of disjoint cycles and as a product of transpositions. Find a permutation τ in S_9 such that $\tau o \sigma = \sigma o \tau = e$, where e is the identity permutation in S_9. 4

(b) Give examples each of a finite and an infinite integral domain. 2

(c) Defining addition and multiplication in $\mathbf{R}^2$ component-wise, i.e.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

prove that $\mathbf{R}^2$ is a ring. Is it an integral domain ? Justify your answer. 4

2. (a) If R is a ring such that $x^2 = x$, for every $x \in R$, show that R is a commutative ring. Give an example of such a ring. 4

(b) Find the nil radical of an integral domain. 2

(c) If F is a field with 49 elements, prove that $x^{49} = x$, $\forall\, x \in F$. Also, find the characteristic of F. 4

3. (a) Show that $\mathbf{Q} + \sqrt{-5}\,\mathbf{Q}$ is a subfield of $\mathbf{C}$. Also, check that it is the quotient field of $\mathbf{Z} + \sqrt{-5}\,\mathbf{Z}$. 4

(b) Classify all the groups of order less than or equal to 6 upto isomorphism. 4

(c) Prove that the polynomial $6x^5 + 30x^4 - 40x^3 + 20x + 40$ is irreducible in $\mathbf{Q}[x]$. Is it irreducible in $\mathbf{Z}[x]$? 2

4. (a) Let

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle|\, a, b, d \in \mathbf{R}, ad \neq 0 \right\}$$

and

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle|\, x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Show that H is a subgroup of G. Further, show that H is a normal subgroup of G. Is G/H abelian ? Justify your answer. 5

(b) Show that $f : \mathbf{Z} + i\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2$ defined by

$$f(a + ib) = (a - b) \pmod 2$$

is an onto ring homomorphism. Determine ker f. Is it a maximal ideal ? Justify your answer. *5*

5. (a) Let $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ be the plane in the rectangular co-ordinate system. Define a relation $\sim$ by $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ iff $x_1 - x_2$ is an integer.

(i) Show that $\sim$ is an equivalence relation.

(ii) Give a geometric description of the equivalence class to which (0, 0) belongs. *4*

(b) If G is a group of even order, prove that it has an element $a \neq e$ satisfying $a^2 = e$, where e is the identity element of G. *2*

(c) Show that the set G of matrices of the form

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

where α is a real number, forms a group under matrix multiplication. *4*

6. (a) Does the ring

$$\frac{\mathbf{Z}_7[x]}{\langle x^2 + \bar{3} \rangle}$$

have nilpotent elements ? Justify your answer. *3*

(b) Find all the maximal ideals of the ring $\mathbf{Z}_{36}$. *4*

(c) Let $M_2(\mathbf{Z})$ be the ring of all 2×2 matrices over the integers and let

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Is R a subring of $M_2(\mathbf{Z})$? Justify your answer. *3*

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give reasons for your answer. *10*

(i) If G is a group of order n and if d is a divisor of n, then there exists a subgroup of G of order d.

(ii) The ring $\mathbf{Q}$ of all rational numbers has proper non-trivial subrings, but has no proper non-trivial ideals.

(iii) If every subgroup of a group G is normal, then G is abelian.

(iv) There exists a field with 100 elements.

(v) Any polynomial of degree n over a ring R can have at most n roots in the ring R.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

*नोट : कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) निम्नलिखित क्रमचय

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल तथा पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए । S_9 में ऐसा क्रमचय τ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\tau o \sigma = \sigma o \tau = e$, जहाँ e, S_9 में तत्समक क्रमचय है । *4*

(ख) परिमित और अपरिमित पूर्णांकीय प्रांत का एक-एक उदाहरण दीजिए । *2*

(ग) $\mathbf{R}^2$ में संगत घटकों के योग और गुणन को परिभाषित करते हुए अर्थात्

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R}^2$ एक वलय है । क्या यह पूर्णांकीय प्रांत है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

2. (क) यदि R एक ऐसा वलय है जिसमें R के प्रत्येक x के लिए $x^2 = x$ है, तब दिखाइए कि R एक क्रमविनिमेय वलय है । ऐसे वलय का एक उदाहरण दीजिए । 4

(ख) पूर्णांकीय प्रांत का शून्य करणी ज्ञात कीजिए । 2

(ग) यदि F एक 49 अवयवों वाला क्षेत्र है, तब सिद्ध कीजिए कि $x^{49} = x, \forall x \in F$. F का अभिलक्षणिक भी ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) दिखाइए कि $\mathbf{Q} + \sqrt{-5}\,\mathbf{Q}$, **C** का एक उपक्षेत्र है । यह भी जाँच कीजिए कि यह $\mathbf{Z} + \sqrt{-5}\,\mathbf{Z}$ का विभाग क्षेत्र है । 4

(ख) 6 या उससे कम कोटि के सभी समूहों का तुल्याकारिता तक वर्गीकरण कीजिए । 4

(ग) सिद्ध कीजिए कि बहुपद

$6x^5 + 30x^4 - 40x^3 + 20x + 40$,

$\mathbf{Q}[x]$ पर अखंडनीय है । क्या यह $\mathbf{Z}[x]$ पर भी अखंडनीय है ? 2

4. (क) मान लीजिए

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, d \in \mathbf{R}, ad \neq 0 \right\}$$

और

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbf{R} \right\}.$$

दिखाइए कि H, G का उपसमूह है । इसके आगे, दिखाइए कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह है । क्या G/H आबेली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 5

(ख) दिखाइए कि $f(a + ib) = (a - b) \pmod 2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{Z} + i\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2$ आच्छादक वलय समाकारिता है । ker f ज्ञात कीजिए । क्या यह एक उच्चिष्ठ गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 5

5. (क) मान लीजिए $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ आयताकार निर्देशांक तंत्र में समतल है । एक संबंध $\sim$ इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ यदि और केवल यदि $x_1 - x_2$ एक पूर्णांक है ।

(i) दिखाइए कि $\sim$ एक तुल्यता संबंध है ।

(ii) उस तुल्यता वर्ग का ज्यामितीय विवरण दीजिए जिसमें (0, 0) है । 4

(ख) यदि G एक सम कोटि का समूह है, तब सिद्ध कीजिए कि इसमें $a^2 = e$ को संतुष्ट करने वाला अवयव $a \neq e$ है, जहाँ e, G का तत्समक अवयव है । 2

(ग) दिखाइए कि रूप $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ के आव्यूहों का समुच्चय G, आव्यूह गुणन के अंतर्गत एक समूह बनाता है, जहाँ α एक वास्तविक संख्या है । 4

6. (क) क्या वलय $\dfrac{\mathbf{Z}_7[x]}{\langle x^2 + \overline{3} \rangle}$ के शून्यंभावी अवयव हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ख) वलय $\mathbf{Z}_{36}$ की सभी उच्चिष्ठ गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए । 4

(ग) मान लीजिए $M_2(\mathbf{Z})$ पूर्णांकों पर सभी 2×2 आव्यूहों का वलय है और मान लीजिए

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

क्या R, $M_2(\mathbf{Z})$ का उपवलय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए । 10

(i) यदि G, कोटि n का समूह है और यदि d, n का विभाजक है, तब कोटि d के G के उपसमूह का अस्तित्व होता है ।

(ii) सभी परिमेय संख्याओं के वलय $\mathbf{Q}$ में उचित अतुच्छ उपवलय होते हैं, लेकिन कोई उचित अतुच्छ गुणजावलियाँ नहीं होती ।

(iii) यदि समूह G का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य है, तब G आबेली है ।

(iv) 100 अवयवों वाले एक क्षेत्र का अस्तित्व होता है ।

(v) वलय R पर घात n के किसी भी बहुपद के वलय R में ज़्यादा से ज़्यादा n मूल हो सकते हैं ।