No. of Printed Pages : 12

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from Q. No. 1 to Q. No. 6. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Let $V = \{f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f_a(x) = x + a, a \in \mathbf{R}\}$. Check whether V is a vector space over **R** if the addition on V is composition of functions and scalar multiplication on V is defined by $\alpha f_a = f_{\alpha a}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *3*

(b) Let V be a vector space which is generated by a finite set of vectors $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Prove that any linearly independent set of vectors in V is finite and contains not more than n elements. *4*

(c) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space V. Prove that $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V if and only if $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$. *3*

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be a linear transformation defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$. If $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ and $B' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ are ordered bases of $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^2$, respectively, find the matrix of T with respect to the pair B, B′. *5*

(b) Check that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ is diagonalisable. Also, find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. *5*

3. (a) Show that the vectors $v_1 = (2i, 1, 0)$, $v_2 = (2, -1, 1)$ and $v_3 = (0, 1 + i, 1 - i)$ form a basis of vector space $\mathbf{C}^3$ over $\mathbf{C}$. Find the coordinates of the vector (1, 0, 1) with respect to the ordered basis $\{v_1, v_2, v_3\}$. *4*

(b) Verify Cayley – Hamilton theorem for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Also find } A^{-1}, \text{ if it exists.}$$ 4

(c) Let (V, < , >) be an inner product space and let $T \in A(V)$ be self-adjoint. Prove that the eigenvalues of T are all real. 2

4. (a) Use Cramer's rule to solve the following system of linear equations : 3

$$x + y + z = 11$$

$$2x - 6y - z = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

(b) Given the basis $\{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)$ of $\mathbf{R}^3$, determine its dual basis. 5

(c) Find D_1^* for the operator D_1, defined on P_n by $D_1\, f(t) = t\, f'(t)$. Inner product on P_n is

$$\langle a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{b}_i .$$

2

5. (a) Let $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + 2c + 2d = 0\}$ and $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a = -b, c = -d\}$. Check that V and W are subspaces of $\mathbf{R}^4$. Further, check that W is a subspace of V. *4*

(b) Let V be the vector space of polynomials with real coefficients and of degree at most 2. Define inner product on V by

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Apply the Gram – Schmidt orthonormalization process to the basis $\{1, x, x^2 + 1\}$ to find an orthonormal basis for V. *6*

6. (a) Reduce the quadratic form $8x^2 - 4xy + 5y^2$ to its normal canonical form. Find its principal axis. Also find its rank and signature. *5*

(b) Consider the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ given by $f(x) = x^2 + x + 1$. Check whether f is $1-1$ and onto. *3*

(c) Find all the values of 'a' for which 1 is an eigenvalue of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. *2*

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or by a counter example. *10*

(i) Similar matrices have the same characteristic polynomial.

(ii) The subspace $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y = z\}$ of $\mathbf{R}^3$ is of dimension 2.

(iii) Eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues of a linear transformation are linearly independent.

(iv) There exist vectors u and v in an inner product space such that $\|u\| = 2$, $\|v\| = 7$, $\|u + v\| = 8$ and $\|u - v\| = 6$.

(v) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space V and $W_1 + W_2 = V$, then $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 करना ज़रूरी है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए कि

$$V = \{f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f_a(x) = x + a, a \in \mathbf{R}\}.$$

यदि V पर योग, फलनों का संयोजन है और V पर अदिश गुणन $\alpha f_a = f_{\alpha a}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है, तो जाँच कीजिए कि V, **R** पर सदिश समष्टि है या नहीं । *3*

(ख) मान लीजिए कि V एक परिमित सदिश समुच्चय $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ द्वारा जनित सदिश समष्टि है । सिद्ध कीजिए कि V में कोई भी रैखिकतः स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय परिमित होता है और उसमें अधिक-से-अधिक n अवयव होते हैं । *4*

(ग) मान लीजिए कि W_1 और W_2 सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियाँ हैं । सिद्ध कीजिए कि $W_1 \cup W_2$, V की उपसमष्टि होती है यदि और केवल यदि $W_1 \subseteq W_2$ हो या $W_2 \subseteq W_1$ हो । 3

2. (क) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$

द्वारा परिभाषित एक रैखिक रूपांतरण है । यदि

$B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ और

$B' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ क्रमशः $\mathbf{R}^3$ और $\mathbf{R}^2$ के क्रमित आधार हैं, तो युग्म B, B′ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए । 5

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

विकर्णनीय है । एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P भी ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह है । 5

3. (क) दिखाइए कि सदिश $v_1 = (2i, 1, 0)$, $v_2 = (2, -1, 1)$ और $v_3 = (0, 1 + i, 1 - i)$ **C** पर सदिश समष्टि $\mathbf{C}^3$ के आधार बनाते हैं । क्रमित आधार $\{v_1, v_2, v_3\}$ के सापेक्ष सदिश (1, 0, 1) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । 4

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

के लिए कैली – हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए । यदि A^{-1} का अस्तित्व है, तो उसे भी ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) मान लीजिए कि (V, < , >) एक आंतर गुणन समष्टि है और मान लीजिए कि $T \in A(V)$ स्वसंलग्न है । सिद्ध कीजिए कि T के सभी आइगेनमान वास्तविक हैं । *2*

4. (क) क्रेमर नियम से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : *3*

$$x + y + z = 11$$

$$2x - 6y - z = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

(ख) $\mathbf{R}^3$ के आधार {(1, – 1, 3), (0, 1, – 1), (0, 3, – 2)} दिए गए हैं । इनका द्वैत आधार ज्ञात कीजिए । *5*

(ग) P_n पर $D_1 f(t) = t f'(t)$ द्वारा परिभाषित संकारक D_1 के लिए D_1^* ज्ञात कीजिए । P_n पर आंतर गुणनफल निम्नलिखित है :

$$\langle a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{b_i}.$$

2

5. (क) मान लीजिए कि

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + 2c + 2d = 0\}$$

और

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a = -b, c = -d\}.$$

जाँच कीजिए कि V और W, $\mathbf{R}^4$ की उपसमष्टियाँ हैं । आगे, जाँच कीजिए कि W, V की उपसमष्टि है । *4*

(ख) मान लीजिए कि V वास्तविक गुणांकों वाले और अधिक-से-अधिक घात 2 वाले बहुपदों की सदिश समष्टि है । V पर $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ द्वारा आंतर गुणनफल परिभाषित कीजिए ।

आधार $\{1, x, x^2 + 1\}$ पर ग्राम – श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग करके V के लिए एक प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए । *6*

6. (क) द्विघाती समघात $8x^2 - 4xy + 5y^2$ को प्रसामान्य विहित रूप में समानीत कीजिए । इसका मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए । इसके जाति और चिह्न भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, जो $f(x) = x^2 + x + 1$ द्वारा दिया गया है, लीजिए । जाँच कीजिए कि f, 1 – 1 है और वह आच्छादक है या नहीं । 3

(ग) 'a' के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए 1, आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ का आइगेनमान है । 2

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए । 10

(i) समरूप आव्यूहों के अभिलक्षणिक बहुपद समान होते हैं ।

(ii) $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y = z\}$ की विमा 2 है ।

(iii) एक रैखिक रूपांतरण के अलग-अलग आइगेनमानों के संगत आइगेनसदिश रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं ।

(iv) एक आंतर गुणन समष्टि में ऐसे सदिशों u और v का अस्तित्व होता है जिनके लिए $\|u\| = 2$, $\|v\| = 7$, $\|u + v\| = 8$ और $\|u - v\| = 6$ है ।

(v) यदि W_1 और W_2 सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं और $W_1 + W_2 = V$ है, तो $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ होता है ।