

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)**Term-End Examination****December, 2014**

01472

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING*Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) For a raindrop of radius $R = 0.36$ cm, assuming that the raindrop is falling in still air, and the acceleration due to gravity is opposed by an amount proportional to the square of the velocity, specifically an amount equal to $\left(\frac{0.00046}{2R}\right) \times (\text{velocity})^2$, write the governing equation. Find the terminal velocity of the raindrop and the time taken by it to reach the ground if it starts its descent in a cloud 3000 m high. 4

- (b) For oxygen transfer in red cells, consider a simple model. Consider a planar section of a red cell which looks like a horizontal plane infinite slab of hemoglobin solution enclosed within a membrane of thickness h . Formulate and solve the model for the diffusion of oxygen through a membrane of thickness h , the two ends of which are maintained at concentration C_1 and C_2 , respectively.

6

2. (a) A particle is projected vertically upwards with a velocity u m/s. After t seconds, another particle is projected upwards from the same point and with the same velocity. Prove that the particles will meet at a height $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ m after a time

$$\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right) \text{ s from the start.}$$

5

- (b) The heat-emission rate associated with a stack gas is 3600 kJ/s; the wind and stack gas speeds are 4 and 16 m/s, respectively, and the inside stack diameter at the top is 3 m. Estimate the plume rise by means of the Moses and Carson formula.

5

3. (a) State the assumptions for formulation of a simple mathematical model for blood flow in arteries for which Poiseuille law is applicable. 2

(b) If the length of the artery is 3 cm (wide arterial capillary) and radius 6×10^{-3} cm and driving force is 5×10^3 dynes/cm², then find the average velocity of blood and the maximum peak velocity of blood. 4

(c) A satellite is orbiting the Earth in a circular orbit at an altitude of approximately 1600 km. Estimate the velocity of the satellite and the time period given that the radius of the Earth is 6400 km. 4

4. (a) What are the types of governing equations you obtain in continuous model and discrete model? Explain giving an example of each type of model. 4

(b) Discuss the static stability and dynamic stability for the following demand and supply functions (assuming the proportionality constant $k = 5$ for dynamic stability):

$$D_t = -0.4 p_t + 200$$

$$S_t = -0.2 p_t + 100$$

Also find the equilibrium price in an ideal competitive market. 6

5. (a) Write the Lotka – Volterra equations for prey-predator model defining each term of the model. Show that in the absence of the predators, the prey grows exponentially, whereas in the absence of the prey, the predator population dies out exponentially. 5

(b) In a hospital, patients arrive according to Poisson distribution at an average rate of 10 patients per hour. The hospital's waiting room can accommodate a maximum of 8 patients. The examining time per patient is an exponential distribution with mean rate of 15 per hour. Find

(i) the effective arrival rate of patients at the hospital.

(ii) the probability that an arriving patient does not have to wait.

(iii) the probability that an arriving patient will find a vacant seat in the waiting room. 5

6. (a) When $\rho_{12} = -1.0$, the standard deviation of a two-security portfolio P is equal to the weighted average of the standard deviations of its component securities. Is it true or false ? Justify your answer. (ρ_{12} is the correlation coefficient of securities 1 and 2). 3

- (b) An investor has ₹ 50,000 to invest in stocks. He has two possible strategies : buy conservative blue chip stocks or buy highly speculative stocks. There are two states of nature : the market goes up or the market goes down. The following pay-off matrix shows the net amounts, he will have under the various circumstances :

		Market	
		Market up	Market down
Investor	Buy Blue Chip	₹ 24,000	₹ 16,000
	Buy speculative	₹ 35,000	₹ 12,000

What should the investor do if he is

- (i) an optimist ?
- (ii) a pessimist ?
- (iii) What is the best strategy, if the probability of a market rise is 0.3 ? 4
- (c) Find the escape velocity of Jupiter for the following data : 3

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}$, radius = $2.58 \times 10^7 \text{ m}$,
mass = $1.966 \times 10^{20} \text{ kg}$.

7. (a) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position, then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum, where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

- (b) Suppose the populations x and y satisfy the equations

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find all critical points of the system. Which critical point represents the possibility of co-existence of two species? Discuss the type and stability of that critical point. 6

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैलकुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) त्रिज्या $R = 0.36 \text{ cm}$ वाली वर्षा-बिन्दु के लिए, मान लीजिए वर्षा-बिन्दु शांत वायु में नीचे गिर रही है, और गुरुत्व त्वरण का विरोध उस मात्रा से होता है जो वेग के वर्ग के समानुपाती है, विशेष रूप से यह मात्रा $\left(\frac{0.00046}{2R}\right) \times (\text{वेग})^2$ के बराबर है । इस समस्या का सूत्रण करने वाला समीकरण लिखिए । वर्षा-बिन्दु का चरम वेग ज्ञात कीजिए तथा यह भी ज्ञात कीजिए कि यदि यह 3000 m की ऊँचाई पर स्थित बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है तो इसे भूमि तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ।

4

(ख) लोहित कोशिकाओं में ऑक्सीजन के अभिगमन के लिए एक सरल निदर्श लीजिए। लोहित कोशिका का एक समतलीय परिच्छेद लीजिए जो मोटाई h वाली कला के अंदर बंद हीमोग्लोबिन विलयन के एक क्षैतिज समतल अनंत स्लैब की तरह दिखाई पड़ता है। निदर्श में मोटाई h वाली कला से होते हुए, जिसके दो सिरे क्रमशः सांद्रण C_1 और C_2 पर बनाए रखे गए हैं, ऑक्सीजन के विसरण को लिया गया है। निदर्श का सूत्रण कीजिए और इसे हल कीजिए।

6

2. (क) एक कण को u m/s के वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। t सेकण्ड के बाद उसी बिन्दु से समान वेग के साथ एक दूसरा कण ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि प्रारंभ होने की अवस्था से समय $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ s के बाद ऊँचाई $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ m पर ये कण मिलेंगे।

5

(ख) स्टैक गैस से संबंधित ऊष्मा-उत्सर्जन दर 3600 kJ/s है, पवन चाल तथा स्टैक गैस चाल क्रमशः 4 और 16 m/s है और ऊपरी सिरे पर स्टैक का अंतःव्यास 3 m है। मोसेज़ और कार्सन सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए।

5

3. (क) धमनियों में रक्त प्रवाह का एक सरल गणितीय निदर्श सूत्रित करने के लिए कल्पनाओं का कथन कीजिए जिनके लिए प्वाज़य नियम लागू होता है । 2
- (ख) यदि धमनी की लंबाई 3 cm (चौड़ी धमनी केशिका) हो, त्रिज्या 6×10^{-3} cm हो और चालक बल 5×10^3 dynes/cm² हो, तो रक्त का औसत वेग और रक्त का अधिकतम शिखर वेग ज्ञात कीजिए । 4
- (ग) एक उपग्रह लगभग 1600 km की ऊँचाई पर वृत्तीय कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है । यदि यह दिया गया हो कि पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km है, तो उपग्रह का वेग और आवर्त-काल आकलित कीजिए । 4

4. (क) संतत निदर्श और असंतत निदर्श का सूत्रण करने में आप किस प्रकार के समीकरण प्राप्त करते हैं ? प्रत्येक प्रकार के निदर्श का एक-एक उदाहरण देते हुए स्पष्ट कीजिए । 4
- (ख) निम्नलिखित माँग फलन और पूर्ति फलन (गतिक स्थायित्व के लिए आनुपातिक चर $k = 5$ मानकर) के लिए स्थैतिक और गतिक स्थायित्व की व्याख्या कीजिए :

$$D_t = -0.4 p_t + 200$$

$$S_t = -0.2 p_t + 100$$

एक आदर्श प्रतियोगी बाज़ार की संतुलन कीमत भी ज्ञात कीजिए । 6

5. (क) परभक्षी-शिकार निदर्श के प्रत्येक पद को परिभाषित करते हुए इस निदर्श के लिए लोटका - वोल्टेरा समीकरण लिखिए । दिखाइए कि परभक्षियों की अनुपस्थिति में, शिकार की संख्या में चरघातांकीय संवृद्धि होती है, जबकि शिकार की अनुपस्थिति में परभक्षियों की संख्या में चरघातांकीय रूप से कमी आती है ।

5

(ख) एक अस्पताल में, रोगी प्वासों बंटन के अनुसार 10 रोगी प्रति घंटा की औसत दर से आते हैं । अस्पताल के प्रतीक्षा कक्ष में अधिक-से-अधिक 8 रोगी बैठ सकते हैं । प्रत्येक रोगी की जाँच करने में लगा समय 15 रोगी प्रति घंटा की औसत दर से एक चरघातांकी बंटन है । निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- (i) अस्पताल में रोगियों के आने की प्रभावी आगमन दर ।
- (ii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले रोगी को प्रतीक्षा न करनी पड़े ।
- (iii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले रोगी को प्रतीक्षा कक्ष में खाली सीट मिल जाए ।

5

6. (क) जब $\rho_{12} = -1.0$, तो दो-प्रतिभूति वाली निवेश-सूची P का मानक विचलन इसकी घटक प्रतिभूतियों के मानक विचलनों के भारित औसत के बराबर होता है । क्या यह कथन सत्य है या असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । (ρ_{12} प्रतिभूतियों 1 और 2 का सहसंबंध गुणांक है)

3

(ख) स्टॉक में निवेश करने के लिए एक निवेशक के पास ₹ 50,000 हैं। इस संबंध में उसके पास दो संभव युक्तियाँ हैं : या तो संरक्षी ब्लू चिप स्टॉक खरीदे या अति सट्टा स्टॉक खरीदे। प्रकृति की दो अवस्थाएँ हैं : या तो बाज़ार चढ़ जाता है या बाज़ार गिर जाता है। निम्नलिखित भुगतान आव्यूह में वे नेट धनराशियाँ दिखाई गई हैं जो कि विभिन्न परिस्थितियों में उसके पास रहती हैं :

		बाज़ार	
		बाज़ार का चढ़ना	बाज़ार का गिरना
निवेशक	ब्लू चिप खरीदता है	₹ 24,000	₹ 16,000
	सट्टा खरीदता है	₹ 35,000	₹ 12,000

निवेशक को क्या करना चाहिए जबकि वह

- आशावादी हो ?
- निराशावादी हो ?
- यदि बाज़ार के चढ़ने की प्रायिकता 0.3 हो, तो सर्वोत्तम युक्ति क्या होगी ?

4

(ग) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए बृहस्पति का पलायन वेग ज्ञात कीजिए :

3

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}, \text{ त्रिज्या} = 2.58 \times 10^7 \text{ m},$$

$$\text{द्रव्यमान} = 1.966 \times 10^{20} \text{ kg}.$$

7. (क) यदि लंबाई l का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर कोण α पर दोलन करता है, तो दोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है ।

4

- (ख) मान लीजिए जनसंख्याएँ x और y निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए । कौन-सा क्रांतिक बिंदु दो प्रजातियों के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ? इस क्रांतिक बिंदु के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए ।

6