

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2014

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01 : CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from Q. No. 2 to Q. No. 7. Use of calculators is not allowed.*

1. Which of the following statements are true ?

Justify your answer.

$5 \times 2 = 10$

- (i) The function $f(x) = \tan 2x$ is periodic with period π .
- (ii) The function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, defined by $f(x) = 1 - |x|$ is differentiable at $x = 1$.

(iii)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_2^{e^x} \ln t \, dt \right] = xe^x - 2e^2.$$

(iv) The function $f : [3, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$ is monotonic on its domain.

(v) Every continuous function is also differentiable.

2. (a) Find the derivative of $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$ w.r.t. x . 3

(b) Evaluate : 2

$$\int \frac{(\cot^{-1} x)^4}{1+x^2} dx$$

(c) Find the length of the curve given by $x = t^3$, $y = 2t^2$ in $0 \leq t \leq 1$. What is the slope of the curve at $t = 1/2$? 5

3. (a) Estimate the area bounded by x -axis, the curve $y = 4x - x^2$, $x = 0$ and $x = 4$, using trapezoidal rule with 8 subdivisions (between $x = 0$ and $x = 4$). Find the actual value and also the error. 5

(b) If $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x dx$, prove that

$$(1 + n^2) I_n = n(n-1) I_{n-2} \text{ for } n \geq 2. \quad 5$$

4. (a) If $f(x) = \sin^{-1} x$, show that
 $(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$. Hence prove that
 $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$. 5

- (b) State Rolle's theorem and verify it for
 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7$ on $[-2, 2]$. 3

- (c) Check whether the function f defined by
 $f(x) = (x - 7)(x^3 + 11)$
is odd or not. 2

5. (a) Evaluate : 6

(i)
$$\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

(ii)
$$\int_2^4 x \ln x dx$$

- (b) Find the equations of the tangent and
normal to $y = x^2 - 5x + 6$ at $x = 2$. 4

6. Trace the curve $y^2 = x(x - 2)^2$, clearly stating its
properties. 10

7. (a) Find the domain and range of the function f , defined by $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$. 3

(b) Is the following function continuous on \mathbf{R} ? 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}, & x \leq 2 \\ 2 - \frac{4}{x}, & x > 2. \end{cases}$$

Justify your answer.

(c) Find the volume of the solid of revolution obtained by revolving the area under the curve $y = 2 + \frac{x^3}{3}$ between $x = 0$ and $x = 2$ about the x -axis. Draw a rough sketch. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना ज़रूरी है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

5×2=10

(i) फलन $f(x) = \tan 2x$, आवर्तक π वाला आवर्ती फलन है।

(ii) $f(x) = 1 - |x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x = 1$ पर अवकलनीय है।

(iii) $\frac{d}{dx} \left[\int_2^{e^x} \ln t \, dt \right] = xe^x - 2e^2$.

(iv) फलन $f: [3, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$ अपने प्रांत में एकदिष्ट है ।

(v) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय भी होता है ।

2. (क) $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए । 3

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 2

$$\int \frac{(\cot^{-1} x)^4}{1+x^2} dx$$

(ग) वक्र $x = t^3$, $y = 2t^2$ की $0 \leq t \leq 1$ में लम्बाई ज्ञात कीजिए । $t = 1/2$ पर वक्र की प्रवणता क्या होगी ? 5

3. (क) वक्र $y = 4x - x^2$, x -अक्ष $x = 0$ और $x = 4$ से घिरे क्षेत्र के 8 उप-विभाजन ($x = 0$ और $x = 4$ के बीच) करके समलंबी नियम द्वारा क्षेत्रफल आकलित कीजिए । क्षेत्रफल का वास्तविक मान निकालिए और त्रुटि भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) यदि $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x dx$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1+n^2) I_n = n(n-1) I_{n-2}; n \geq 2 \text{ के लिए । } 5$$

4. (क) यदि $f(x) = \sin^{-1} x$, तो दर्शाइए कि
 $(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$. इस प्रकार सिद्ध कीजिए
कि $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$. 5

- (ख) रोल प्रमेय का कथन दीजिए और $[-2, 2]$ पर
 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7$ के लिए प्रमेय की जाँच कीजिए। 3

- (ग) जाँच कीजिए कि $f(x) = (x - 7)(x^3 + 11)$ द्वारा
परिभाषित फलन f विषम है या नहीं। 2

5. (क) मूल्यांकन कीजिए : 6

(i)
$$\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

(ii)
$$\int_2^4 x \ln x dx$$

- (ख) $y = x^2 - 5x + 6$ की $x = 2$ पर स्पर्श रेखा और लम्ब
के समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

6. वक्र $y^2 = x(x - 2)^2$ का अनुरेखण इसके सभी गुणधर्मों को
लिखकर कीजिए। 10

7. (क) $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$ द्वारा परिभाषित फलन f के प्रांत और गोचर (परास) ज्ञात कीजिए । 3

(ख) क्या निम्नलिखित फलन \mathbf{R} पर संतत है ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}, & x \leq 2 \\ 2 - \frac{4}{x}, & x > 2. \end{cases}$$

अपने उत्तर का कारण दीजिए । 3

(ग) वक्र $y = 2 + \frac{x^3}{3}$ को $x = 0$ और $x = 2$ के बीच x -अक्ष के प्रति घुमाने से प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए । वक्र का मोटे तौर पर (रफ़) आरेख भी बनाइए । 4