MTE-03

03430

BACHELOR OF DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is **compulsory**. Do **any four** questions from question numbers **1** to **6**. Use of calculator is not allowed.*

1. (a) Define $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Is f injective, surjective, monotone ? 3

(b) A bag contains 3 white balls and 2 red balls. Another bag contains 5 white and 3 red balls. A bag is chosen at random and a ball is drawn from it. Find the probability that it is white. 3

(c) Compute the correlation co-efficient between X and Y for the following data : 4

X	9	7	6	1	3	9	4
Y	1	3	5	6	9	6	4

2. (a) Find asymptotes of the graph of the function 3

$y = \frac{x^2 - 8}{x - 1}$.

(b) Find the term independent of a in the binomial expansion of $\left(3a - \frac{4}{a^6}\right)^7$. 3

(c) In a certain Poisson distribution the probability of 3 successes is exactly equal to the probability of 4 successes. Find its mean and standard deviation. Also find the probability of more than 1 success for the given distribution. 4

3. (a) Integrate $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x}{i - x^2}\right) dx$. 3

(b) Find the mean and the standard deviation of a random variable with probability density function. 4

$f(x) = e^{-x}, x \geq 0$.

(c) A club has 9 member having ages 21, 28, 23, 29, 52, 43, 32, 37 and 30 years. One has to be at least 30 years of age to be eligible for the presidentship of the club. A simple random sample of size 5 is selected to provide an estimate of the population proportion eligible for presidentship. Find the mean and the standard error of this estimate. 3

4. (a) Find the radius of the sphere which passes through the points (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1). 3

(b) Verify Euler's theorem for the function 3

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

(c) Two groups of 10 plants each were grown on two different fertilisers. The average height of first group of plants was 92.44 cm., with a standard deviation of 4 cm. For the second group, the average height was 90 cm with a standard deviation of 2 cm. At 5% level of significance test the hypothesis that first fertiliser is better than the second in terms of the plant growth. 4

$[t_{0.05,18} = 1.734, t_{0.05,20} = 1.729, t_{0.05,22} = 1.721]$

5. (a) Find $(a \times b).\ c$ where 3

$a = 2i + 3j - k,\ b = i - 2j + k,\ c = 3i + 4j + 5k.$

(b) Solve the differential equation 3

$$\cos x \frac{dy}{dx} + \sin xy = x\ e^{2x} \cos^2 x$$

(c) A garden pea plant is genetically mixed for the gene pair Tt, where the gene T (for tall) is dominant over the gene t (for short). The plant produced 40 tall and 20 short offspring. Using x^2-test find out whether the plant was self fertilised or fertilised by a short plant at 5% level of significance. 4

6. (a) It is known that 10 men out of every 100 men and 30 women out of every 1000 women are color blind. In a community, half the population is male. Using Baye's theorem find the probability that a color blind person chosen at random from among all color blind persons in the community is male. **3**

(b) Show that $\sin x(1+\cos x)$ has a maximum at $x = \frac{\pi}{3}$. **4**

(c) Find the sum of the first n terms of the series **3**
$\log 2 + \log 6 + \log 18 + \log 54 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

7. State whether the following statements are *true* or *false* giving reasons in support of your answer.

(a) A binomial distribution has mean 3 and variance 4. **2x5=10**

(b) The function $f(x) = x^3$ has no maxima or minima.

(c) The line of regression of x on y is the same as the line of regression of y on x.

(d) The plane $x + 2y - z = 5$ is parallel to the line

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+1}{-1}$$

(e) A continuous random variable can have probability density function

$$f(x) = 4x^2, \quad 0 < x \leq 1$$
$$= 0 \qquad \text{otherwise.}$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी डी पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की* ***अनुमति नहीं*** *है।*

1. (a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ को परिभाषित कीजिए। बताइए क्या f एकैकी है, आच्छादी है, एकदिष्ट है ? 3

(b) एक थैले में 3 सफेद गेंदे और 2 लाल गेंदे है। एक अन्य थैले में 5 सफेद और 3 लाल गेंदे हैं। एक थैला यादृच्छया चुनकर उसमें से एक गेंद निकाली जाती है। यह गेंद सफेद है-इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3

(c) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए X और Y के बीच सह संबंध गुणांक परिकलित कीजिए : 4

X	9	7	6	1	3	9	4
Y	1	3	5	6	9	6	4

2. (a) फलन $y=\dfrac{x^2-8}{x-1}$ के ग्राफ के अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए। 3

(b) $\left(3a-\dfrac{4}{a^6}\right)^7$ के द्विपद प्रसार में a से मुक्त पद ज्ञात कीजिए। 3

(c) किसी प्वांला बंटन में तीन सफलताओं की प्रायिकता ठीक चार सफलताओं की प्रायिकता के बराबर है। इसका माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। दिए गए बंटन के लिए एक से अधिक सफलता की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए। 4

3. (a) $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{i-x^2}\right)dx$ को समाकलित कीजिए। 4

(b) प्रायकिता घनत्व फलन $f(x)=e^{-x}$, $x \geq 0$ वाले यादृच्छिक चर का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 3

(c) एक क्लब में नौ सदस्य हैं जिनकी आयु 21, 28, 23, 29, 52, 43, 32, 37 और 30 वर्ष हैं। क्लब के अध्यक्ष पद के लिए व्यक्ति का कम से कम 30 वर्ष का होना ज़रूरी है। अध्यक्ष पद के लिए पात्र समष्टि अनुपात का आकलन करने के लिए आमाप 5 के सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श को चुना जाता है। इस आकलन का माध्य और मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए। 3

4. (a) ऐसे गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) और (0, 0, 1) से होकर गुज़रता है। 3

(b) फलन $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ के लिए आयलर प्रमेय की जाँच कीजिए। 3

(c) दो समूहों में दस-दस पौधे लगाए गए। दोनों समूहों में अलग-अलग प्रकार की खाद डाली गई। प्राप्त परिणाम के अनुसार पहले समूह के पौधों की औसत ऊँचाई 92.44 से.मी. और मानक विचलन 4 से.मी. था। दूसरे समूह के पौधों की औसत ऊँचाई 90 से.मी. और मानक विचलन 2 से.मी. था। 5% सार्थकता स्तर पर इस परिकल्पना का परीक्षण कीजिए कि पौधे की वृद्धि के संदर्भ में पहली खाद दूसरी खाद से बेहतर है। 4

[$t_{0.05,18} = 1.734$, $t_{0.05,20} = 1.729$, $t_{0.05,22} = 1.721$]

5. (a) $(a \times b).\, c$ ज्ञात कीजिए जहाँ 3

$a = 2i + 3j - k,\ b = i - 2j + k,\ c = 3i + 4j + 5k.$

(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 3

$$\cos x \frac{dy}{dx} + \sin xy = x\, e^{2x} \cos^2 x$$

(c) उद्यान में लगे मटर के पौधे को जीन युग्म Tt के लिए आनुवंशिकत: मिश्रित किया जाता है, जहाँ जीन T (लंबे के लिए) जीन t (छोटे के लिए) पर प्रभावी है। इस पौधे से 40 लम्बे और 20 छोटे पौधे निकले। 5% सार्थकता स्तर पर x^2-परीक्षण द्वारा ज्ञात कीजिए कि पौधा स्व-उर्वरित है या एक छोटे पौधे से उर्वरित किया गया है। 4

6. (a) यह ज्ञात है कि प्रत्येक 100 पुरुषों में से 10 पुरुष और प्रत्येक 1000 महिलाओं में से 30 महिलाएँ वर्णांध हैं। एक समुदाय में लगभग आधी जनसंख्या पुरुषों की है। बेज प्रमेय से यह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि समुदाय के सभी वर्णांध व्यक्तियों में से यादृच्छया चुना गया वर्णांध व्यक्ति पुरुष होगा। **3**

(b) दिखाइए कि $\sin x(1+\cos x)$, $x=\frac{\pi}{3}$ पर उच्चिष्ठ है। **4**

(c) श्रेणी $\log 2+\log 6+\log 18+\log 54+\cdots$ के पहले n पदों का योग ज्ञात कीजिए। **3**

7. अपने उत्तर के पक्ष में कारण देते हुए बताइए कि निम्नलिखित कथन ***सत्य*** है या ***असत्य***। **2x5=10**

(a) एक द्विपद बंटन का माध्य 3 और प्रसरण 4 हो सकता है।

(b) फलन $f(x)=x^3$ का कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं होता।

(c) y पर x की समाश्रयण रेखा x पर y की समाश्रयण रेखा के समान होती है।

(d) समतल $x+2y-z=5$ रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ के समांतर होता है।

(e) एक संतत यादृच्छिक चर का निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन हो सकता है

$$f(x)=4x^2,\ 0<x\le 1$$
$$=0 \qquad \text{अन्यथा.}$$