BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage 70%

Note : *Answer **any five** questions. All questions carry **equal** marks. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) A particle moving in a straight line is subjected to a resistance which produces the retardation kv^3 where v is the velocity of the particle at any time t and k is a constant. Show that the velocity v and the time t are given in terms of the distance s by the equations : 4

$$v = \frac{u}{1 + ksu} \text{ and } t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2} ks^2 .$$

(b) Return distribution of two securities are as given in the table below : 6

Event	Chance	Return	
	$p_1j = p_2j$	R_1j	R_2j
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	0.25	11	9

Find the correlation coefficient p_{12} of the two securities. What does the value of p_{12} suggest about the shape of the curve representing the set of portfolios of the two securities ?

2\. (a) For steady state assuming the wind velocity and diffusion coefficient to be in x - direction only, derive an expression for the dispersion of a contaminant using Fick's law of diffusion. 5

(b) The model for the number of infectives y of a population affected by the spread of a non-fatal disease results in a differential equation 5

$$\frac{dy}{dt} = y\ (N\beta - Y - \beta y),\ y\ (0) = y_0$$

Where N the total population, y_0 the initial infected population, y the recovery rate and β the contact rate are all constants. Solve for y and show that the epidemic converges exponentially to the stable state.

3\. (a) Determine whether the equation 2

$$s = s_0 + v_0 t - 0.5\ gt^2$$

is dimensionally compatible if s is the position of the body at time t, S_0 is the position at $t = 0$, v_0 the initial velocity and g is the acceleration due to gravity. Give reasons for your answer.

(b) Find the range of values of p and q which will render the entry (2, 2) a saddle point for the following game : 3

Player B

	2	4	5
Player A	10	7	q
	4	p	6

(c) Suppose you are driving a van down a highway. Use dimensional analysis to find the wind force you are experiencing, assuming that the force is affected by the wind density, the speed of the van and its surface area exposed to the wind direction. 3

(d) The average number of new cases of disease is proportional to : 2

(i) (number of susceptibles)^2

(ii) number of infectives

Set up the model equation for the average number of new cases in an initial population of n individuals.

4. (a) A stone is dropped vertically from a tower of height h. At the same time another stone in thrown vertically upwards from the base of the tower with a velocity u. What is the minimum value of u so that the two stones will meet each other mid air ? 5

(b) The cost of production of a substance per unit is given by the formula $C = q^2 - 4q + 1$, where q is the material cost. Find the selling price per unit, so that the profit on 100 units will be Rs. 200, if $q = 15$. **5**

Also calculate the cost of material per unit so that profit on 100 units can be maximised, if the selling price is Rs. 200.

5. (a) Give one example each from the real world for the following, along with justification, for your example : **3**

   (i) A non-linear model

   (ii) A stochastic model

   (iii) A linear deterministic model

(b) Consider the following system of differential equations representing a prey and predator population model : **7**

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

   (i) Identify all the real critical points of the system of equations given above.

   (ii) Obtain the type and stability of these critical points.

6. (a) Formulate the initial boundary value problem for the temperature T in a cylindrical rod with insulated sides and with flat ends at $x = 0$ and $x = L$, the end at $x = 0$ is kept at 60°C and the end at $x = L$ is insulated. At time $t = 0$, the temperature distribution through out the rod is $f(x)$, $0 < x < L$. Assume no internal heat generation. 5

[**Hint** : Heat flux across an insulated boundary is zero, that is grad T.n = 0, where n is the normal to the boundary].

(b) Find the steady state solution of the problem formulated in Q 6 (a) above. 3

(c) Define discrete and continuous models, giving an example of each. 2

7. (a) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find : 5

(i) the utilisation factor for this service facility.

(ii) the probability of two units in the system.

(iii) the expected number of units in the system.

(iv) the expected time in hours that a customer has to spend in the system.

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius 8×10^{-3}cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2 then find the **5**

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) the shear stress at the wall.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का : 70%

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं। कैल्कुलेटर का उपयोग वर्जित है।*

1. (a) सरल रेखा में गतिमान एक कण पर प्रतिरोध लगाने से विलम्बन kv^3 उत्पन्न होता है जहाँ v किसी भी समय t पर कण का वेग है और k एक अचर है। दिखाइए कि दूरी s के पदों में वेग v और समय t निम्नलिखित सभीकरणों द्वारा प्राप्त हैं : 4

$$v = \frac{u}{1 + ksu} \text{ और } t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2} ks^2$$

जहाँ u कण का प्रारंभिक वेग है।

(b) दो प्रतिभूतियों का प्रतिफल बंटन नीचे तालिका में दिया गया है : 6

घटना	संयोग	प्रतिफल	
	$p_1j = p_2j$	R_1j	R_2j
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	0.25	11	9

दोनों प्रतिभूतियों का सहसंबंध गुणांक p_{12} ज्ञात कीजिए। दोनों प्रतिभूतियों की निवेश-सूचियों के समुच्चय को निरुपित करने वाले वक्र के आकार के बारे में p_{12} का यह मान क्या बतलाता है?

2. (a) स्थायी-अवस्था के लिए, यह मानकर कि वायु वेग और विसरण गुणांक केवल x -दिशा में हैं, तब फिक के विसरण नियम का प्रयोग करके संदूषण के परिक्षेपण के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। 5

(b) संक्रामक बीमारी के फैलने से प्रभावित होने वाली समष्टि में y संक्रामक व्यक्तियों का निदर्श अवकल समीकरण 5

$$\frac{dy}{dt} = y\ (N\beta - Y - \beta y),\ y\ (0) = y_0$$

से प्राप्त होता है, जहा N कुल सभष्टि, y_0 प्रारंभिक संक्रमित समष्टि, y ठीक होने की दर और β संपर्क दर सभी अचर हैं। y के लिए हल प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि स्थायित्व अवस्था के प्रति महामारी चरघांताकी रूप में अभिसरित हो।

3. (a) यदि समय t पर वस्तु की स्थिति s है, t = 0, पर स्थिति s_0 है, v_0 प्रारंभिक वेग है और g गुरुत्वीय त्वरण है, तब निर्धारित कीजिए की समीकरण 2

$$s = s_0 + v_0 t - 0.5\ gt^2$$

विमीय रूप से सुसंगत है या नहीं। अपने उत्तर के कारण बताइए।

(b) p और q के मानों के वे परिसर ज्ञात कीजिए जो एन्ट्री (2, 2) को निम्नलिखित खेल का पलायन बिंदु बना देते है : 3

खिलाड़ी B

	2	4	5
खिलाड़ी A	10	7	q
	4	p	6

(c) मान लीजिए आप राजमार्ग पर एक वैन चला रहे हैं। मान लीजिए कि वायु बल जिसे आप महसूस कर रहे हैं वह वायु घनत्व, वैन की गति और वायु की दिशा में प्रस्तुत वैन के पृष्ठीय क्षेत्रफल से प्रभावित होता है। विमीय विश्लेषण का प्रयोग करके वायु बल ज्ञात कीजिए। 3

(d) किसी रोग से पीड़ित हो रहे नए रोगियों की औसत संख्या निम्नलिखित के समानुपाती है : 2

(i) (सुग्राह्य व्यक्तियों की संख्या)^2

(ii) संक्रामक व्यक्तियों की संख्या।

n व्यक्तियों की आदि जनसंख्या में नए रोगियों की औसत संख्या के लिए निदर्श समीकरण स्थापित कीजिए।

4. (a) ऊँचाई h वाले एक टावर से एक पत्थर को ऊर्ध्वाधरत: गिराया गया। उसी समय टावर के तले से एक अन्य पत्थर को वेग u से ऊर्ध्वाधरत: ऊपर फेंका गया। u का निम्नतम मान क्या होगा जिससे कि दोनों पत्थर बीच हवा में एक दूसरे से मिलें ? 5

(b) एक वस्तु का प्रति इकाई उत्पादन लागत सूत्र $C = q^2 - 4q + 1$, जहाँ q माल लागत है, द्वारा दिया गया है। प्रति इकाई बेचने की कीमत ज्ञात कीजिए जिससे कि 100 इकाइयों पर 200 रु. का लाभ हो जबकि $q = 15$ है। 5

यदि बेचने की कीमत 200 रु. हो तो 100 इकाईयों पर अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए प्रति इकाई माल लागत भी ज्ञात कीजिए।

5. (a) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित एक-एक उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 3

(i) अरैखिक निदर्श

(ii) प्रसंभाव्य निदर्श

(iii) रैखिक, निर्धारणात्मक निदर्श।

(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए जो शिकार और परभक्षी के जनसंख्या निदर्श को निरुपित करता हो : 7

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) ऊपर दिए गए समीकरण निकाय के सभी वास्तविक क्रांतिक बिंदु पहचानिए।

(ii) इन क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए।

6. (a) एक बेलनाकार छड़ में तापमान T की आदि परिसीमा मान समस्या का सूत्रण कीजिए जिसकी सतहें उष्मारोधी हैं और जिसके सपाट सिरे $x = 0$ और $x = L$, पर हैं। $x = 0$ पर सिरे को 60°C के तापमान पर रखा गया है और $x = L$ पर सिरा ऊष्मारोधी हैं। समय $t = 0$ पर पूरी छड़ में तापमान बंटन $f(x)$, $0 < x < L$ है। मान लीजिए कि छड़ के अन्दर कोई ऊष्मा जनित नहीं हो रही है। 5

(**संकेत** : ऊष्मारोधी परिसीमा पर ऊष्मा अभिवाह शून्य होता है, अर्थात (grad $T.n = 0$, जहाँ n परिसीमा पर अभिलंब है।)

(b) उपर्युक्त 6 (क) में सूत्रित समस्या का अपरिवर्ती अवस्था हल ज्ञात कीजिए। 3

(c) प्रत्येक के उदाहरण सहित असतंत और संतत निदर्शों को परिभाषित कीजिए। 2

7. (a) किसी सेवा केन्द्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है। माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है। प्वासों आगमन और चरघातांकीय सेवा समय की कल्पना करते हुए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 5

(i) सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या,

(iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटों में व्यतीत किया जाने वाला प्रत्याशित समय।

(b) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ पॉयज है। यदि धमनी की लम्बाई 1.5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3}cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2 हो, तो : **5**

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।