

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

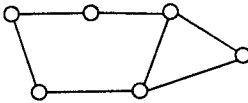
Weightage : 70%

Note : Question No. 1 is compulsory. Do any four questions from question numbers 2 to 7. Calculators are not allowed.

1. Which of the following statements are false and which are true? Justify your answers with a short proof or a counter - example. 10

(a) There can be a simple graph on n vertices, with all degrees distinct.

(b) The edge connectivity of the following graph is 2.



(c) The number of $(m+n)$ -digit binary sequences with m 0's and n 1's such that no two 1's are adjacent, where $n \leq m+1$ is $C(m+1, n)$.

- (d) $a_n + \sqrt{a_{n-1}} + a_{n-2}^2 = 0$ is a homogeneous linear recurrence relation.
- (e) "Every real number is the square of another real number" is a proposition.

2. (a) Show, by mathematical induction, that 3 divides $n(n+1)(n+2)$ for $n \geq 1$. 3

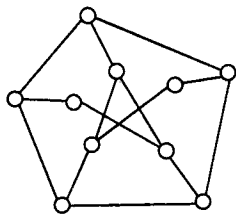
(b) Prove $\sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3}$. 4

(c) Draw two non-isomorphic, connected, 3-regular graphs on 8 vertices. Justify the non-isomorphism. 3

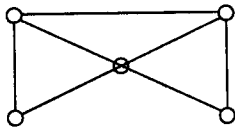
3. (a) Find the coefficient of x^{29} in the expansion of $(1 + x^5 + x^7 + x^9)^{1000}$. 3

(b) Set up a recurrence relation for the n -digit sequences of numbers using only the integers $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ and having an even number of 4's. 4

(c) Check whether or not the following graph is non-planar. 3

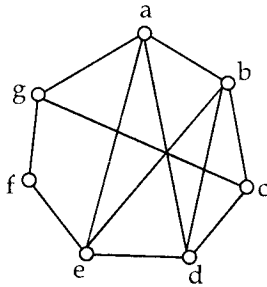


4. (a) How many distinct solutions are there of $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ in \mathbf{Z}^+ , the set of positive integers? 2
- (b) In how many ways can the integers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 be permuted such that none of the integers 3, 5, 7 and 8 will be in their natural position. 2
- (c) Let $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, for $a, b \in X$, define 6
 $a \wedge b = \text{lcm of } a \text{ and } b$
 $a \vee b = \text{gcd of } a \text{ and } b$.
 Check whether or not X is a Boolean algebra with respect to the operations \vee and \wedge .
5. (a) Give a direct proof of the statement, 2
 "If x and y are odd, then $x.y$ is odd."
 (b) Solve recurrence relation 5
 $a_n - n.a_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1,$ using exponential generating functions.
 (c) Construct an Eulerian, but non-Hamiltonian, graph on six vertices. 3
6. (a) Write down the truth table for 3
 $(P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow \sim R)$.
 (b) Draw three non-isomorphic spanning trees 3
 of the following graph, with justification.



- (c) Find the general solution of the recurrence relation $a_n = 3 a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$. Also find the solution when $a_1 = 6$. 4

7. (a) Find the chromatic number $\chi(G)$ of the following graph G . Also find the colour classes for a colouring of the graph with $\chi(G)$ colours. 3



- (b) Write the following argument in symbolic form. "Either I shall go home or go to the library. I shall not go home. Therefore, I shall go to the library". Also test the validity of this argument. 3
- (c) Find the number of permutations of the letters of the word ASSESSMENT, taken all at a time. 2
- (d) If $G(X)$ is the generating function of the sequence $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, what is the generating function of the sequence $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots$? 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

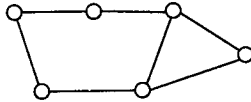
कुल का: 70%

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन असत्य हैं और कौन से सत्य ? 10

लघु-उपपत्ति या प्रति-उदाहरण से अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

- (a) n शीर्षों पर एक ऐसा सरल ग्राफ हो सकता है जिसकी सभी कोटियाँ अलग-अलग हों।
- (b) निम्नलिखित ग्राफ का कोर-संबद्धतांक 2 है।



- (c) m 0's और n 1's वाले $(m+n)$ -अंक ऐसी द्विभाजी अनुक्रमों की संख्या जिसमें कोई भी दो 1 संलग्न नहीं है, जहाँ $n \leq m+1$, $C(m+1, n)$ है।

- (d) $a_n + \sqrt{a_{n-1}} + a^2_{n-2} = 0$ एक समघात रैखिक पुनरावृत्ति संबंध है।
- (e) "प्रत्येक वास्तविक संख्या दूसरी वास्तविक संख्या का वर्ग होते हैं", यह एक कथन है।

2. (a) गणितीय आगमन द्वारा दिखाइए कि $n \geq 1$ के लिए $3, n(n+1)(n+2)$ को विभाजित करता है। 3

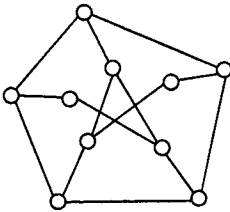
(b) सिद्ध कीजिए कि $\sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3}$. 4

(c) 8 शीर्षों पर दो अतुल्याकारी, संबंध 3-नियमित ग्राफ बनाइए। अतुल्याकारिता की पुष्टि कीजिए। 3

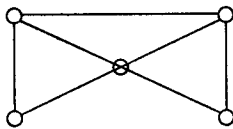
3. (a) $(1 + x^5 + x^7 + x^9)^{1000}$ के प्रसार में x^{29} का गुणांक ज्ञात कीजिए। 3

(b) केवल पूर्णाकों $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ का प्रयोग करके n -अंक वाली संख्याओं के अनुक्रम, जिसमें 4 सम संख्या में हो, का पुनरावृत्ति संबंध स्थापित कीजिए। 4

(c) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ असमतलीय है या नहीं : 3

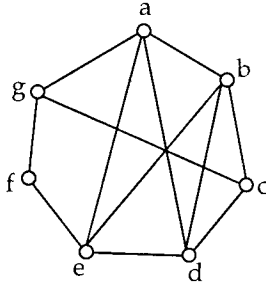


4. (a) धनात्मक पूर्णाकों के समुच्चय Z^+ में $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ के कितने अलग-अलग हल होंगे? 2
- (b) पूर्णाकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 का कितने तरीको में क्रमचय किया जा सकता है कि पूर्णाकों 3, 5, 7 और 8 में से कोई भी अपनी प्राकृतिक स्थिति में न हो। 2
- (c) मान लीजिए $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $a, b \in x$ के लिए $a \wedge b = a$ और b का लघुत्तम समापवर्त्य और $a \vee b = a$ और b का महत्तम समापवर्तक परिभाषित कीजिए। 6
- जाँच कीजिए कि X, \vee और \wedge संक्रियाओं के सापेक्ष बूलीय बीजवाली है या नहीं।
5. (a) “यदि x और y विषम है, तब $x.y$ विषम है”, इस कथन की प्रत्यक्ष अपपत्ति दीजिए। 2
- (b) चरघातांकी जनक फलन प्रयोग करते हुए, पुनरावृत्ति संबंध $a_n - n.a_{n-1} = (-1)^n, n \geq 1$ को हल कीजिए। 5
- (c) छह शीर्षों पर एक ऐसा ग्राफ बनाइए जो ऑयलरीय तो हो, परंतु हैमिल्टनीय न हो। 3
6. (a) $(P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow \sim R)$ के लिए सत्य सारणी बनाइए। 3
- (b) निम्नलिखित ग्राफ के पुष्टि सहित तीन अतुल्याकारी जनक वृक्ष बनाइए : 3



- (c) पुनरावृत्ति संबंध $a_n = 3 a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। ऐसा हल भी ज्ञात कीजिए जहाँ $a_1 = 6$. 4

7. (a) निम्नलिखित ग्राफ G की वर्णिक संख्या $\chi(G)$ ज्ञात कीजिए। 3



$\chi(G)$ वर्णों वाले ग्राफ रेजन के लिए वर्ण-वर्ग भी ज्ञात कीजिए।

- (b) निम्नलिखित तर्क को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए : 3
 “या तो मैं घर जाऊँगी या लाइब्रेरी जाऊँगी। मैं घर नहीं जाऊँगी, इसलिए मैं लाइब्रेरी जाऊँगी।” इस तर्क की मान्यता की जाँच भी कीजिए।
- (c) ASSESSMENT शब्द के अक्षरों के कितने क्रमचय होंगे, जबकि एक बार में शब्दों के सभी अक्षरों को लिया गया हो। 2
- (d) यदि $G(X)$, अनुक्रम $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ का जनक फलन है, 2
 तब अनुक्रम $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots$ का जनक फलन ज्ञात कीजिए।