No. of Printed Pages : **11**

MTE-10

00775

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Answer **any five** questions. All computation may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation **3**

$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0.$

Taking the end points of this interval as initial approximations, perform 2 iterations of the secant method.

(b) Evaluate the integral **5**

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{3 + 2x}$$

using trapezoidal rule with 2 and 4 subintervals. Determine the minimum number of subintervals required if the error in magnitude is less than 0.002.

(c) A particle is moving along a straight line. The displacement x at sometime instant t is given below **2**

t	0	1	2	3
x	5	8	12	17

Find the velocity of the particle at t=3.

2\. (a) Perform 3 iterations of the Gauss-seidel iteration method to solve the system of equations. **4**

$$4x+2z=6$$

$$5y+2z=-3$$

$$5x+4y+10z=11$$

Take the initial approximation as $x^{(0)}=1.5,\ y^{(0)}=-0.6,\ z^{(0)}=1.1$.

(b) Using divided differences, show that the data. **3**

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	18	12	8	6	8	12

represents a second degree interpolating polynomial. Hence, obtain the polynomial.

(c) Consider the Taylor series expansion for the function $f(x)=x^{5/2}$ in $[-1, 1]$ about $x=0$. Check if the bounds for the error (i) $R_2(x)$ (ii) $R_3(x)$ exists. Give justification for your answer. **3**

3. (a) Find an approximate value of y (1.2) for the initial value problem $y^1 = x^2 + 2y^2$, $y(1) = 1$ using the classical Runge-kutta fourth order method with $h = 0.1$. 6

(b) Prove that $\mu = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$ where δ is the central difference operator and μ is the mean operator. 2

(c) For the function $f(x) = \frac{1}{x}$, show that second order divided difference based on the points x_0, x_1, x_2 is 2

$$f\{x_0, x_1, x_2\} = \frac{1}{x_0\ x_1\ x_2}.$$

4. (a) Using Taylor series third order method solve the initial value problem $y^1 = x + y^2$, $y(0) = 1$ upto $x = 0.4$ with $h = 0.2$. 5

(b) The solution of the system of equations 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$ is attempted by the Gauss - Jacobi and Gauss - Seidal iteration schemes. Set up the two schemes in the matrix form. Will the iteration scheme converge ? Justify your answer.

5. (a) Solve the system of equations 5

$$4x + y + z = 4$$

$$x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 2y - 4z = 6$$

using LU factorization method. Take the diagonal elements of U as 1.

(b) The equation $f(x) = 18x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ has 3 real roots. Find the intervals which contain each of these roots. Perform 2 iterations of the bisection method to obtain the negative root. 3

(c) Show that $\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$ where Δ and ∇ are the forward and the backward difference operators, respectively. 2

6. (a) Find the largest eigen value in magnitude of the matrix 5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

using the power method. Take the initial approximation to the eigenvector as $v^{(0)} = [\ 1\ 1\ 1\ ]^T$ and perform 4 iterations.

(b) Using Lagrange interpolation and the following data : 3

x	-3	-1	0	2
$f(x)$	-29	-1	1	11

find the approximate value of $f(1)$.

(c) Using synthetic division, find $f'(3)$ where $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$. 2

7. (a) Solve the system of equations 3

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$2x + 8y + 22z = 6$$

$$3x + 22y + 82z = -10$$

Using Gauss - elimination method with pivoting. 5

(b) The method

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n + \frac{5N}{x_n 2} - \frac{N^2}{x_n 5}\right], n = 0, 1, 2, \dots$$

where N is a positive constant, converges to $N^{1/3}$. Find the rate of convergence of the method.

(c) Find the interval which contains all the eigen values of the matrix **2**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$ using Gerschgorin bounds.

एम.टी.ई.-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बीडीपी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का 70%)

नोट : ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने कि अनुमती* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के अंत्य बिन्दुओं को आदि सन्निकटन मान कर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 3

(b) 2 और 4 उप-अंतराल लेकर समाकलन के समलंबी नियम द्वारा 5

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{3 + 2x}$$

का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। उप-अंतरालों की निम्नतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे कि त्रुटि का परिमाण 0.002 से कम हो।

(c) एक कण सीधी रेखा में गतिमान है। कुछ समयों t पर, कण का विस्थापन x नीचे दिया गया है : 2

t	0	1	2	3
x	5	8	12	17

t = 3 पर कण का वेग ज्ञात कीजिए।

2. (a) समीकरण निकाय 4

$$4x + 2z = 6$$
$$5y + 2z = -3$$
$$5x + 4y + 10z = 11$$

को हल करने के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए। आरंभिक सन्निकटन को $x^{(0)} = 1.5$, $y^{(0)} = -0.6$, $z^{(0)} = 1.1$ लेकर चलिए।

(b) विभाजित अंतर का प्रयोग करके दिखाइए कि आँकड़े 3

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	18	12	8	6	8	12

द्वितीय घात अंतर्वेशन बहुपद को निरूपित करते हैं। अतः बहुपद ज्ञात कीजिए।

(c) $x = 0$ के प्रति अंतराल $[-1, 1]$ में फलन $f(x) = x^{5/2}$ का टेलर प्रसार लीजिए। जाँच कीजिए कि क्या त्रुटि (i) $R_2(x)$ (ii) $R_3(x)$ के परिबंधों के अस्तित्व हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

3. (a) $h=0.1$ लेकर चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या $y^1=x^2+2y^2$, $y\,(1)=1$ के लिए $y\,(1.2)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। 6

(b) सिद्ध कीजिए कि : 2

$$\mu = \sqrt{1+\frac{1}{4}\,\delta^2}$$

जहाँ δ केन्द्रीय अंतर संकारक, और μ माध्य संकारक हैं।

(c) फलन $f\,(x) = \frac{1}{x}$ के लिए दिखाइए कि बिंदुओं x_0, x_1, x_2 पर आधारित द्वितीय कोटि विभाजित अंतर 2

$$f\{\,x_0, x_1, x_2\,\} = \frac{1}{x_0 \;\; x_1 \;\; x_2} \text{ है।}$$

4. (a) तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि द्वारा $h=0.2$ लेकर $x=0.4$ तक आदि मान समस्या $y^1=x+y^2$, $y\,(0)=1$ का हल प्राप्त कीजिए। 5

(b) गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधियों द्वारा समीकरण निकाय 5

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$$

का हल प्राप्त करने का प्रयास किया गया। दोनों विधियों को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए। क्या ये पुनरावृत्ति विधियाँ अभिसारित होती हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. (a) U के सभी विकर्ण अवयवों को 1 मानकर, LU वियोजन विधि द्वारा समीकरण निकाय 5

$$4x + y + z = 4$$
$$x + 4y - 2z = 4$$
$$3x + 2y - 4z = 6$$

का हल प्राप्त कीजिए।

(b) समीकरण

$f(x) = 18\, x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ के 3 वास्तविक मूल हैं। प्रत्येक मूल को आविष्ट करने वाले अंतराल ज्ञात कीजिए। ऋण मूल ज्ञात करने के लिए समद्विभाजन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 3

(c) दिखाइए कि : 2

$$\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$$

जहाँ Δ और ∇ क्रमशः अग्रांतर और पश्चांतर अंतर संकारक हैं।

6. (a) आव्यूह **A** के लिए परिमाण में बृहत्तम आइगनमान और संगत आइगनसदिश ज्ञात करने के लिए घात विधि की चार पुनरावृत्तियाँ कीजिए जहाँ, 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ सन्निकटित आरंभिक आइगनसदिश

को $v^{(0)} = [\ 1\ 1\ 1\ ]^T$ लेकर चलिए।

(b) लग्रांज अंतर्वेशन और निम्नलिखित आँकड़ों 3

x	-3	-1	0	2
$f(x)$	-29	-1	1	11

का प्रयोग करके $f(1)$ का सन्निकट मान प्राप्त करें।

(c) संश्लेषिक विभाजन का प्रयोग करके $f'(3)$ प्राप्त कीजिए 2

जहाँ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1.$

7. (a) कीलकन सहित गाउस विलोपन विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए : 3

$$x + 2y + 3z = 5$$
$$2x + 8y + 22z = 6$$
$$3x + 22y + 82z = -10$$

(b) विधि 5

$$x_{n+1} = \frac{1}{9} \cdot \left[5x_n + \frac{5N}{x_n 2} - \frac{N^2}{x_n 5} \right], n = 0, 1, 2, \ldots$$

जहाँ N एक धन अचर है, $N^{1/3}$ की ओर अभिसरित होती है। विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

(c) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यूह 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

के सभी आइगनमानों को अंतर्विष्ट करने वाला अंतराल ज्ञात कीजिए।
