No. of Printed Pages : 8 **MTE-01**

01060

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Q. no. 1 is **compulsory**. Attempt **any four** questions from Q. no. 2 to Q. no. 7. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. State whether the following statements are **true** or **false**. Justify your answers. **10**

(a) $|x|$ is integrable in $[-2, 2]$.

(b) The curve $x^3 + y^3 = 3axy$ has no asymptotes parallel to the axes.

(c) The range of the function f, defined by $f(x) = x^2$ on **R** is $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

(d) $\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ex} \cos t \, dt\right] = e^x \cos e^x$.

(e) The function f, defined by $f(x) = 3x^2 + 5x$, is monotonic in $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

2\. (a) Find the points of inflection of the curve $y = 4x^3 - 8x^2 + 7$, if any. 2

(b) If $y = e^{m\tan^{-1} x}$, check whether $(1+x^2)\, y_{n+1} + (2nx - m) y_n = 0$. 3

(c) Differentiate $\cos^{-1}(2t^2 - 1)$ with respect to $\sin^{-1}\left(\sqrt{1 - t^2}\right)$. 2

(d) Find the following limits : 3

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 11x + 8}{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{4x}$

3\. (a) Find the domain of the function f, defined by : 2

$f(x) = \sqrt{(x-2)(x+3)}$

(b) verify Rolle's theorem for the function f on $[-3, 0]$, defined by 4

$f(x) = x(x+3)\, e^{-\frac{x}{2}}$.

(c) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the parabolas $y = x^2$ and $x = y^2$ about the x-axis. 4

4. (a) Evaluate : **4**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 4\sin^2 x}$$

(b) Using the trapezoidal rule, evaluate **3**

$\int_4^8 \frac{dx}{x}$, dividing [4, 8] into four equal intervals.

(c) Find all the points of discontinuity of the function f, defined by : **3**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \ x < 2 \\ 3x - 2 & , \ x \geq 2 \end{cases}$$

5. (a) Show that : **5**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}},$$

and hence evaluate $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

(b) Find the length of the curve $2y^2 = x^3$ from the vertex (0, 0) to the point (2, 2). **5**

6. Trace the curve $y^2(1+x^2) = x^2(1-x^2)$, stating clearly the properties used for doing so. **10**

7. (a) Prove that $\ln(1+x) < x$ for all $x > 0$. **2**

(b) Integrate $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{(2x+1)(x^2-1)}$ **3**

(c) Check whether the function f, defined by : **2**

$$f(x) = \cos 2x + \tan x,$$

is periodic. If so, find its period. If f is not periodic, define a functioning, such that $f - g$ is periodic.

(d) Find the equation of the tangent to the curve given by : **3**

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2} \;;\; y = \frac{2at^3}{1+t^2} \quad \text{at } t = \frac{1}{2}.$$

एम.टी.ई.-01

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्र.सं. 1 करना ज़रूरी है। प्र.सं. 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए निम्नलिखित प्रश्न **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 10

(a) $|x|$, $[-2, 2]$ में समाकलनीय है।

(b) वक्र $x^3+y^3=3axy$ के अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शी नहीं होते।

(c) $\mathbf{R}$ पर $f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित फलन f की परिसर $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ है।

(d) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_3^{ex} \cos t \, dt\right]=e^x \cos e^x$.

(e) $f(x)=3x^2+5x$ द्वारा परिभाषित फलन f, $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$ में एकदिष्ट है।

2. (a) यदि वक्र $y = 4x^3 - 8x^2 + 7$ के कोई नति परिवर्तन बिंदु हों तो, उन्हें ज्ञात कीजिए। 2

(b) यदि $y = e^{m\tan^{-1}x}$, तब जाँच कीजिए कि 3

$(1+x^2)\, y_{n+1} + (2nx - m) y_n = 0$ है या नहीं।

(c) $sin^{-1}\left(\sqrt{1 - t^2}\right)$ के सापेक्ष $\cos^{-1}(2t^2 - 1)$ को अवकलित कीजिए। 2

(d) निम्नलिखित सीमाएँ ज्ञात कीजिए : 3

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 11x + 8}{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{4x}$

3. (a) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत मालूम कीजिए। 2

(b) $[-3, 0]$ पर $f(x) = x(x+3)\, e^{-\frac{x}{2}}$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए। 4

(c) x-अक्ष के प्रति परवलयों $y = x^2$ और $x = y^2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश के घूर्णन से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 4

4. (a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 4\sin^2 x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

(b) समलंबी नियम द्वारा, [4, 8] को चार समान अंतरालों में विभाजित करते हुए $\int_4^8 \frac{dx}{x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , x < 2 \\ 3x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी वे बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ f संतत नहीं है। 3

5. (a) दिखाइए कि : 5

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$$

और इस तरह $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) शीर्ष (0, 0) से बिन्दु (2, 2) तक वक्र $2y^2 = x^3$ की लंबाई ज्ञात कीजिए। 5

6. वक्र $y^2(1+x^2) = x^2(1-x^2)$ का अनुरेखण कीजिए। अनुरेखण में इस्तेमाल किए गए गुणों को स्पष्ट रूप से बताइए। 10

7. (a) सिद्ध कीजिए कि सभी $x > 0$ के लिए $\ln(1+x) < x$. 2

(b) $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{(2x+1)(x^2-1)}$ को समाकलित कीजिए। 3

(c) जाँच कीजिए कि $f(x) = \cos 2x + \tan x$ द्वारा परिभाषित फलन f आवर्ती है या नहीं। यदि है, तो इसका आवर्तक ज्ञात कीजिए। यदि f आवर्ती नहीं है, तो एक ऐसा फलन g परिभाषित कीजिए जिसके लिए $f - g$ आवर्ती हो। 2

(d) $t = \frac{1}{2}$ पर $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$; $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ द्वारा परिभाषित वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3