

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**Term-End Examination**

December, 2013

00440

PHYSICS**PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN
PHYSICS-III***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

Note : Attempt all questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.

1. Attempt **any five** parts : **2x5=10**

- (a) Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are real.
- (b) Prove that a symmetric tensor A^{ij} remains symmetric under coordinate transformations.
- (c) Show that Z^2 is analytic throughout the complex plane.
- (d) Determine the Laplace transform of te^{at} .
- (e) Show that $\{1, -1, i, -i\}$ forms a cyclic group of order 4.
- (f) Locate and name the singularities of the

function $\frac{e^{1/z}}{(z+a)}$

- (g) Show that : $\int_{-1}^{+1} P_2(x) [P_0(x) + P_2(x)] dx = \frac{2}{5}$

2. Attempt **any two** parts : 2x5=10
- (a) Obtain the eigen values and eigen vectors
of the 2×2 matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) For the quadratic equation $2x^2 + 4xy - y^2 = 6$, write down the matrix of co-efficients and diagonalize it. Recast the equation in new variables and identify the conic section.
- (c) Enumerate all the symmetries of an equilateral triangle.

3. Attempt **any one** part : 10

- (a) Evaluate the integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} \quad a, b > 0$$

- (b) Show that $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} = \frac{2\pi}{3}$

4. Attempt **any two** parts : 2x5=10

- (a) Calculate the Fourier sine transform of the function

$$f(x) = e^{-ax} \quad a > 0, \quad 0 < x < \infty$$

- (b) Using Laplace transforms, solve the initial value problem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \cos \omega t \quad \text{where } y = y_0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

$$\text{at } t = 0$$

- (b) लाप्लास रूपांतरण विधि का उपयोग कर निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल करें :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \cos \omega t$$

जहाँ $t = 0$ पर $y = y_0$; $\frac{dy}{dt} = v_0$ है।

- (c) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित करें :

$$\left\{ \frac{2s + 6}{s^4} \right\}$$

5. कोई एक भाग करें :

10

- (a) लेजान्ड्रे बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$g(x, t) = \frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n, |t| < 1$$

दिखाएँ कि :

$$2x p'_n(x) + p_n(x) = p'_{n+1}(x) + p'_{n-1}(x)$$

- (b) हर्मिट बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

लांबिकता संबंध :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{n,m}$$

- (c) Find the inverse Laplace transform of

$$\left\{ \frac{2s + 6}{s^4} \right\}$$

5. Attempt any one part :

10

- (a) The generating function for the Legendre polynomials is give by

$$g(x,t) = \frac{1}{\{1-2tx+t^2\}^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, |t| < 1$$

Show that

$$2x p'_n(x) + p_n(x) = p'_{n+1}(x) + p'_{n-1}(x)$$

- (b) Using the generating function of Hermite

polynomials $e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$

Prove the orthogonality relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{n,m}$$

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : सभी प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।
प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग करें: 2x5=10

(a) सिद्ध करें कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

(b) सिद्ध करें कि एक सममित टेन्सर A_{ij} निर्देशांक रूपांतरण के अधीन सममित रहता है।

(c) दिखाएँ कि Z^2 पूरे सम्मिश्र समतल पर विश्लेषिक है।

(d) te^{at} का लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें।

(e) दिखाएँ कि $\{1, -1, i, -i\}$ कोटि 4 वाला एक चक्रीय समूह है।

(f) फलन $\frac{e^{1/z}}{(z+a)}$ की विचित्रताओं का निर्धारण करें और उनके नाम बताएँ।

(g) दिखाएँ कि :

$$\int_{-1}^1 p_2(x)[p_0(x) + p_2(x)] = \frac{2}{5}$$

2. कोई दो भाग करें :

2x5=10

(a) निम्नलिखित 2×2 आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त करें।

(b) द्वीघात समीकरण $2x^2 + 4xy - y^2 = 6$ के गुणांकों का आव्यूह लिखिए और उसका विकर्णन कीजिए। इसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शंकु परिच्छेद को निरूपित करता है।

(c) एक समबाहु त्रिभुज की सभी सममितियाँ बताएँ।

3. कोई एक भाग करें :

10

(a) निम्नलिखित समाकल का मान परिकलित करें :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} \quad a, b > 0$$

(b) दिखाएँ कि : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} = \frac{2\pi}{3}$

4. कोई दो भाग करें :

2x5=10

(a) निम्नलिखित फलन का फूरिये साईन रूपांतर प्राप्त करें :

$$f(x) = e^{-ax} ; a > 0, 0 < x < \infty$$