No. of Printed Pages : 8

MTE-10

02343

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Answer **any five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

1. (a) Obtain the 8th Taylor series expansion of the function $f(x) = \sin x$ in $\left[-\pi/4, \pi/4\right]$ about $x_0 = 0$. Obtain a bound for the error $R_9(x)$. **4**

(b) Find the approximate root of the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$ upto three decimal places using Newton Raphson's method, starting with $x_0 = 1/2$. **4**

(c) If $f(x) = e^{ax}$, show that $\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ax}$. **2**

2. (a) Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ using Gauss Jordan method. **3**

(b) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$, with $y(0) = 1$ using Euler's method in the interval [0, 0.04] by dividing the interval into 2 sub intervals. 3

(c) Obtain the Newton's Backward difference polynomial for the following data : 4

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

Also calculate the value of f (0.25).

3. (a) Determine the constants a, b, c and d such that the interpolating polynomial 6

$$y_s = y(x_0+sh)$$

$$= ay_0+by_1+h^2\left(cy_0''+dy_1''\right) \text{ becomes}$$

correct to the highest possible order.

(b) Using fourth order classical Runge-kutta method solve $y' = xy$ for $x = 1.2$, $y(1) = 2$ and $h = 0.2$. 4

4. (a) The iteration method 4

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n+\frac{5N}{x_n^2}-\frac{N^2}{x_n^5}\right], n = 0, 1, 2, ...$$

where N is a positive constant, converges to $N^{1/3}$. Find the rate of convergence of the method.

(b) Perform four iteration of the power method to find the largest Eigen value in magnitude 6

for the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Take the initial approximate Eigen vector as $[1, 1, 1]^T$.

5. (a) Solve the system of equations 6

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$

$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17$

by Gauss - elimination with partial pivoting.

(b) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour. 4

t = time in minutes	V = velocity km/hr
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

6. (a) From the following table, find the number of students who obtained less than 55 marks, using interpolation. 5

Marks	No. of Students
30 - 40	22
40 - 50	32
50 - 60	34
60 - 70	20
70 - 80	12

(b) Using Gerschgorin bounds, find the estimates of the Eigen values of the matrix 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Draw a rough sketch of the bounds.

7. (a) Find the interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation $x^3 - 2x - 10 = 0$. Using the mid-point of this interval as initial approximation, perform two iterations of the Birge-Vieta method. 6

(b) Determine a unique polynomial $f(x)$ *of degree* ≤ 3 *such that* $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2$, $f'(x_1) = 3$, where $x_1 - x_0 = h$. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्याक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक किए जा सकते हैं। कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) अंतराल $\left[-\pi/4, \pi/4\right]$ में फलन $f(x) = \sin x$ का $x_0 = 0$ के प्रति 8वाँ टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। त्रुटि $R_9(x)$ का परिबंध ज्ञात कीजिए। **4**

(b) $x_0 = 1/2$ से प्रारंभ करके न्यूटन-रैफसन विधि द्वारा समीकरण $x^3 - 3x + 1 = 0$ का सन्निकट मूल तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए। **4**

(c) यदि $f(x) = e^{ax}$ तो दिखाइए कि **2**

$\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ax}$.

2. (a) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। **3**

(b) अंतराल [0, 0.04] में ऑयलर विधि द्वारा समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$, $y(0) = 1$ का हल प्राप्त कीजिए। अंतराल को दो उपअंतरालों में विभाजित कीजिए। 3

(c) निम्नलिखित आकड़ों के लिए न्यूटन पश्चांतर बहुपद ज्ञात कीजिए : 4

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

$f(0.25)$ का मान भी प्राप्त कीजिए।

3. (a) अचर a, b, c और d के वे मान ज्ञात कीजिए जिससे कि अंतर्वेशन बहुपद 6

$$y_s = y(x_0+sh)$$

$$= ay_0+by_1+h^2\left(cy_0''+dy_1''\right)$$ अधिकतम संभव कोटि के लिए परिशुद्ध हो।

(b) $h = 0.2$ लेकर चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा $y' = xy$, $y(1) = 2$ का हल $x = 1.2$ के लिए प्राप्त कीजिए। 4

4. (a) पुनरावृत्ति विधि : 4

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}\left[5x_n+\frac{5N}{x_n^2}-\frac{N^2}{x_n^5}\right], n = 0, 1, 2, ...$$

जहाँ N एक घन अचर है, $N^{1/3}$ की ओर अभिसरित होती है। इस विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

(b) घात विधि की चार पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ का बृहत्तम आइगनमान ज्ञात कीजिए।

सन्निकटित आरंभिक आइगनसदिश को $[1, 1, 1]^T$. लेकर चलिए।

5. (a) आंशिक कीलकन के साथ गाउस विलोपन विधि लागू करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए : 6

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$
$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17.$

(b) विश्रामावस्था से आरंभ कर रही एक गाड़ी का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है। 4

सिम्प्सन का $\frac{1}{3}$ नियम लागू करके इस घंटे में गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

t = समय मिनटों में	V = वेग कि.मी/घंटे में
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

6. (a) अंतर्वेशन द्वारा निम्नलिखित सारणी से 55 अंक से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए : 5

अंक	छात्रों की संख्या
30 - 40	22
40 - 50	32
50 - 60	34
60 - 70	20
70 - 80	12

(b) गर्शगोरिन परिबंधो द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगनमान आकलित कीजिए। परिबंधो का रेखांकन मोटे तौर पर कीजिए। 5

7. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $x^3 - 2x - 10 = 0$ के सबसे छोटे घनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के मध्य बिंदु को आदि सन्निकटन मान कर, बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 6

(b) घात ≤ 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2, f'(x_1) = 3$, हो जहाँ $x_1 - x_0 = h$. 4