

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)****Term-End Examination****December, 2013****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

**Note :** Question no. 7 is *compulsory*. Do *any four* questions from question numbers 1 to 6. Use of calculator is *not allowed*.

1. (a) Integrate :  $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$  3

(b) Let  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  be defined by 3  
 $f(x) = 9x^2 + 6x + 1, x \in \mathbf{R}$   
 Is  $f$  injective? Is  $F$  surjective? Give reasons for your answer.

(c) On an average, one candidate out of every ten fails in a certain examination. In a group of 5 candidates find the probability that at least four candidates pass the examination. 4

2. (a) A straight line passes through a point  $(-1, -2, 3)$  and through a point of intersection of the lines 3

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$$

$$\text{and } \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

Find the equation of the line.

- (b) Solve the differential equation 4

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1-x^2}y = xy^2.$$

- (c) A reading test is given to an elementary school class that consists of 12 girls and 10 boys. The results of the test are : 3

	Girls	Boys
Mean	74	70
S.D	8	10

Is the difference between the means of the two groups significant at 5% level of significance ?

$$[t_{20, 0.05} = 2.086, t_{22, 0.05} = 2.074, t_{21, 0.05} = 2.080]$$

3. (a) The following results have been obtained 4

from 12 pairs of observations of two variables  $x$  and  $y$  :

$$\Sigma x = 29, \Sigma y = 15, \Sigma x^2 = 649, \Sigma y^2 = 465, \text{ and } \Sigma xy = 430.$$

Find the correlation coefficient between  $x$  and  $y$  and the regression coefficient of  $y$  on  $x$ .

- (b) If vectors  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfy the relation 3

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ then show that}$$

$$\alpha \times \beta = \beta \times \gamma = \gamma \times \alpha.$$

- (c) Out of 24 bulbs in a shop 4 bulbs are 3

defective. If we randomly check two bulbs, then what is the probability that

- (i) both the bulbs are defective :
- (ii) neither of them is defective :
- (iii) one of them is defective ?

4. (a) The cost of constructing a 1000 metres road is as follows : Rs. 220 for the first metre and an additional Rs. 20 for every subsequent metre. Find the cost of constructing the last metre of the road and that for the entire road. 3

- (b) If  $V = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$  then find the value of 3

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y}.$$

- (c) A die is thrown 156 times with the following results : 4

Number turned up :	1	2	3	4	5	6
Frequency :	19	23	28	20	35	31

At 5% level of significance test the hypothesis that the die is unbiased.

$$\left[ \text{Given } \chi_{0.05, 5}^2 = 11.07, \chi_{0.05, 7}^2 = 14.07, \chi_{0.05, 6}^2 = 12.59 \right]$$

5. (a) The sum of a negative integer and its square is 30. Find the integer. 2

- (b) Find the maximum value of  $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ . 4

- (c) The probability density function of  $x$  be represented by 4

$$f(x) = C e^{-2x}, x \geq 0$$

Find

- (i) the constant  $C$
- (ii) mean of  $x$
- (iii) variance of  $x$
- (iv)  $P(2 < x < 4)$ .

6. (a) Measurements of a sample of six weights were determined as 8.5, 10.6, 9.8, 8.8, 10.4, 9.5 Kilograms respectively. Determine an unbiased estimate of the population mean and population standard deviation. Also determine the estimate of the variance of the sample mean. 3
- (b) Find the equation of the tangent and the normal to the curve 3

$$y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2} \text{ at the point } x = 2a.$$

- (c) For the data given below : 4

Class Intervals	Frequencies
1.5 - 4.5	1
4.5 - 7.5	3
7.5 - 10.5	8
10.5 - 13.5	5
13.5 - 16.5	3

Calculate :

- (i) mean
- (ii) median
- (iii) mode for the data
7. State whether the following statements are **true or false**, giving reasons in support of your answers. 2x5=10
- (a)  $\log 3 + \log 6 + \log 12 + \dots$ , is a geometric series.
- (b)  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ , can be expanded in a Mc Laurin Series.

- (c) The function  $f(x) = 2ax + 3$ ,  $x \neq 2$ , and  $f(2) = 23$ , is continuous at  $x = 2$  for some value of  $a$ .
- (d) For two mutually exclusive events A and B  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- (e) If the correlation coefficient between  $x$  and  $y$  is 0.5 then the correlation coefficient between  $2x$  and  $y$  is 1.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी.डी.पी. )

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

**नोट :** प्रश्न संख्या 7 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a)  $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$  को समाकलित कीजिए। 3
- (b) मान लीजिए  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 9x^2 + 6x + 1, x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है। क्या  $f$  एकैकी है? क्या  $f$  आच्छादी है? अपने उत्तर के कारण बताइए। 3
- (c) किसी एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों में से औसतन एक विद्यार्थी फेल होता है। 5 विद्यार्थियों के समूह में कम से कम चार विद्यार्थी उत्तीर्ण होंगे, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 4

2. (a) एक सीधी रेखा बिंदु  $(-1, -2, 3)$  और रेखाओं 3

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3} \text{ और } \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1-x^2}y = xy^2$  को 4

हल कीजिए।

- (c) एक प्रारंभिक स्कूल की कक्षा, जिसमें 12 लड़कियाँ 3  
और 10 लड़के हैं, का पढ़ने का टेस्ट लिया गया। टेस्ट का परिणाम इस प्रकार से है :

	लड़कियाँ	लड़के
माध्य	74	70
भाजक विचलन	8	10

क्या 5% सार्थकता स्तर पर दोनों समूहों के माध्यों के बीच अंतर सार्थक है ?

$$[t_{20, 0.05} = 2.086, t_{22, 0.05} = 2.074, t_{21, 0.05} = 2.080]$$

3. (a) दो चरों  $x$  and  $y$  के 12 युग्मों के प्रेक्षणों से प्राप्त हुए 4  
परिणाम निम्नलिखित हैं :

$\Sigma x = 29$ ,  $\Sigma y = 15$ ,  $\Sigma x^2 = 649$ ,  $\Sigma y^2 = 465$  और  $\Sigma xy = 430$ .

$x$  और  $y$  के बीच सहसंबंध गुणांक और  $x$  पर  $y$  का समाश्रयण गुणांक ज्ञात कीजिए।

- (b) यदि सदिश  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  संबंध  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  को संतुष्ट करते हैं, तब दिखाइए कि :

$$\alpha \times \beta = \beta \times \gamma = \gamma \times \alpha.$$

- (c) एक दुकान में 24 बल्बों में से 4 बल्ब खराब हैं। यदि हम यादृच्छया दो बल्बों की जाँच करते हैं तो इसकी क्या प्रायिकता होती कि :

(i) दोनों बल्ब खराब हों :

(ii) उनमें से कोई भी बल्ब खराब न हो :

(iii) उनमें से एक बल्ब खराब हो ?

4. (a) 1000 मीटर सड़क को बनाने की लागत इस प्रकार है पहले मीटर की 220 ₹ और अगले प्रत्येक मीटर के लिए 20 ₹ अतिरिक्त। सड़क के अंतिम मीटर और पूरी सड़क को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए।

- (b) यदि  $V = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$  तब  $x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y}$  का मान ज्ञात

कीजिए।



- (c) एक पाँसे को 156 बार फेंका जाता है और उससे 4  
निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं :

पाँसे पर आने वाली संख्या :	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	19	23	28	20	35	31

5% सार्थकता स्तर पर इस परिकल्पना का परीक्षण कीजिए कि पांसा अनभिन्न है।

$$\left[ \text{Given } \chi_{0.05,5}^2 = 11.07, \chi_{0.05,7}^2 = 14.07, \chi_{0.05,6}^2 = 12.59 \right]$$

5. (a) ऋण पूर्णांक और उसके वर्ग का योग 30 है। पूर्णांक ज्ञात 2  
कीजिए।

- (b)  $\left(\frac{1}{x}\right)^x$  का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। 4

- (c)  $x$  का प्रायिकता घनत्व फलन को 4  
 $f(x) = C e^{-2x}, x \geq 0$

द्वारा निरूपित किया जाता है। निम्नलिखित ज्ञात  
कीजिए :

- (i) अचर  $C$   
(ii)  $x$  का माध्य  
(iii)  $x$  का प्रसरण  
(iv)  $P(2 < x < 4)$

6. (a) छह भारों के प्रतिदर्श के माप क्रमशः 8.5, 10.6, 9.8, 8.8, 10.4, 9.5 कि.ग्रा. निर्धारित किए गए। समष्टि माध्य का अनभिन्नत आकलन और समष्टि मानक विचलन ज्ञात कीजिए। प्रतिदर्श माध्य के प्रसरण का आकलन भी निर्धारित कीजिए। 3
- (b) बिन्दु  $x=2a$  पर वक्र  $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$  की स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3
- (c) निम्नलिखित आंकड़े 4

वर्ग अन्तराल	बारंबारता
1.5 - 4.5	1
4.5 - 7.5	3
7.5 - 10.5	8
10.5 - 13.5	5
13.5 - 16.5	3

का (i) माध्य (ii) माध्यिका (iii) बहुलक ज्ञात कीजिए।

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है वा असत्य। अपने उत्तरों के पक्ष में कारण दीजिए। 2x5=10

- (a)  $\log 3 + \log 6 + \log 12 + \dots$ , एक गुणोत्तर श्रेणी है।

- (b)  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ , को मैक्लोरियन श्रेणी में विस्तारित किया जा सकता है।
- (c)  $a$  के किसी मान के लिए  $x=2$  पर फलन  $f(x) = 2ax + 3$ ,  $x \neq 2$ , और  $f(2) = 23$ , संतत है।
- (d) दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं  $A$  और  $B$  के लिए  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- (e) यदि  $x$  और  $y$  के बीच सह संबंध गुणांक  $0.5$  है तब  $2x$  और  $y$  के बीच सहसंबंध गुणांक  $1$  है।
-