No. of Printed Pages : 8 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Attempt* ***any four*** *questions from Q.No* ***1*** *to* ***6****. Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Find the dimension of the subspace of $\mathbf{R}^3$ spanned by the vectors **3**

$$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\-3\\1\end{bmatrix}$$

(b) Let $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$ where $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$ and $v_3 = (-1, -1, 0)$. Find the dual basis of B. **3**

(c) Let T be a linear operator on $\mathbf{C}^2$ defined by $T(1, 0) = (1 + i, 2)$ and $T(0, 1) = (i, i)$. Using the standard inner product, find the matrix of T^* with respect to the basis $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. **4**

2. (a) Find the eigenvalues and a basis for each of the eigen spaces of the matrix **5**

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Is A diagonalizable ?

(b) Does the basis 5
$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$
form an orthonormal basis of $\mathbf{R}^3$ with respect to the standard inner product of $\mathbf{R}^3$? Justify your answer. If it doesn't form an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$, apply Gram-Schmidt process to obtain an orthonormal basis $\mathbf{R}^3$ with respect to the standard inner product on $\mathbf{R}^3$.

3. (a) Find the radius and the centre of the circular section of the sphere $|r| = 4$ cut off by the plane $r \cdot (i - j - k) = 2\sqrt{3}$. 4

(b) Apply the Cayley-Hamilton theorem to find the inverse of the matrix. 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Let S and T be the linear transformations from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^2$ defined by 2
$S(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$
$T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$
Find S oT and T oS.

4. (a) Let V be the vector space of all 2×2 matrices over the field $\mathbf{R}$. Let 6

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

and

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Verify that W_1, W_2 are subspaces of V. Find the dimensions of $W_1 + W_2$ and $W_1 \cap W_2$ as well.

(b) Let T be a linear operator on C_3 defined by T (1, 0, 0) = (1, 0, i), T (0, 1, 0) = (0, 1, 1), T (0, 0, 1) = (i, 1, 0) 2

Show that T is not invertible.

(c) Show that 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = ab$$

5. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form 8

$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy + 4yz - 4zx$. Also, determine its prinicipal axes and it signature.

(b) Let **P** be the vector space of polynomials over **R** and $S = \{x-1,\ x^2-1,\ x^3-1\}$. Does the polynomial $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \in [S]$? Justify your answer. 2

6. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ and $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 4

Is the equation $Ax = b$ consistent for all possible b_is ? Justify your answer.

(b) Let T be a linear operator on $\mathbf{R}^3$ given by T (x, y, z) = (3x + z, − 2x + y, − x + 2y + 4z). Find the matrix of T with respect to the ordered basis {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} of $\mathbf{R}^3$. 3

(c) Find the minimal polynomial for the matrix 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer. 10

(a) If W_1, W_2 are subspaces of $\mathbf{R}^3$ and $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^3$, then $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(b) If T_1 and T_2 are invertible linear transformations from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^2$, then $T_1 + T_2$ is not invertible.

(c) In $\mathbf{R}^2$, the operator defined by reflection in y - axis is equal to its inverse.

(d) The equation $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ represents a hyperbola.

(e) There exists no linear operator with characteristic polynomial $(x-1)^2 (x+1)$ and minimal polynomial $(x-1)^2$.

एम.टी.ई.-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) निम्नलिखित सदिशों द्वारा विस्तारित $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि की विमा ज्ञात कीजिए : 3

$$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\-3\\1\end{bmatrix}$$

(b) मान लीजिए $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का आधार है, जहाँ $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$ और $v_3 = (-1, -1, 0)$. B का द्वैत आधार कीजिए। 3

(c) मान लीजिए T, $T(1, 0) = (1 + i, 2)$ और $T(0, 1) = (i, i)$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{C}^2$ पर रैखिक संकारक है। मानक आंतर फलन द्वारा आधार $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ के सापेक्ष T^* का आव्यूह ज्ञात कीजिए। 4

2. (a) आव्यूह 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान और प्रत्येक आइगेनसमष्टि का आधार ज्ञात कीजिए। क्या A विकर्णनीय है?

(b) क्या आधार $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$ 5
$\mathbf{R}^3$ के मानक आंतर फलन के सापेक्ष $\mathbf{R}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार बनाता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह $\mathbf{R}^3$ के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार नहीं बनाता तब $\mathbf{R}^3$ का मानक आंतर फलन के सापेक्ष $\mathbf{R}^3$ के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त करने के लिए S पर ग्राम - रिमर प्रक्रिया लागु कीजिए।

3. (a) गोले $|r| = 4$ के समतल $r \cdot (i - j - k) = 2\sqrt{3}$ द्वारा 4
किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या और कैंन्द्रं ज्ञात कीजिए।

(b) आयूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात करने के 4
लिए केली-हैमिल्टन प्रमेय को लागु कीजिए।

(c) मान लीजिए S, T, $S(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$ 2
$T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{R}^2$ के $\mathbf{R}^2$ तक रैखिक रुपांतरण है। SoT और ToS ज्ञात कीजिए।

4. (a) मान लीजिए V क्षेत्र $\mathbf{R}$ पर सभी 2×2 आव्यूहो की 6
सादिश समष्टि है। मान लीजिए

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

और

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$$

सत्यापित कीजिए कि W_1, W_2 की उपसमष्टियाँ हैं। $W_1 + W_2$ and $W_1 \cap W_2$ के विमाएँ भी ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए T 2

T (1, 0, 0) = (1, 0, i)
T (0, 1, 0) = (0, 1, 1)
T (0, 0, 1) = (i, 1, 0)

द्वारा परिभाषित $\mathbf{C}^3$ पर एक रैखिक संकारक है। दिखाइए कि T व्यूत्क्रमणीय नहीं है।

(c) दिखाइए कि 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = ab$$

5. (a) द्विधाती समघात 8

$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy + 4yz - 4zx$ को लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इसके मुख्य अक्ष और चिन्हक भी निर्धारित कीजिए।

(b) मान लिजिए **P, R** पर बहुपदों की सदिश समष्टि है और $S = \{x-1, \quad x^2-1, \quad x^3-1\}$ क्या बहुपद $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \in [S]$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए. 2

6. (a) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ और $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. 4

क्या समीकरण $A_x = b$ सभी संभावित b_i के लिए संगत है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(b) मान लीजिए T, 3

$T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$

द्वारा दिए गए $\mathbf{R}^3$ पर रैखिक संकारक है। $\mathbf{R}^3$ के क्रमित आधार $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

(c) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ के लिए निम्निष्ट बहुपद ज्ञात कीजिए। 3

7. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 10

(a) यदि W_1, W_2 $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ है और $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^3$, तब $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(b) यदि T_1 और T_2 $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ तक व्युत्क्रमणीय रैखिक रूपांतरण है, तब $T_1 + T_2$ व्युत्क्रमणीय नहीं है।

(c) $\mathbf{R}^2$ में y - अक्ष में परावर्तन द्वारा परिभाषित संकारक अपने प्रतिलोम के बराबर होता है।

(d) समीकरण $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ अतिपरवलय को निरूपित करती है।

(e) अभिलक्षणिक बहुपद $(x-1)^2 (x+1)$ और निम्निष्ट बहुपद $(x-1)^2$वाले किसी रैखिक संकारक का अस्तित्व नहीं होता।