

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is compulsory. Solve any four from the remaining questions.

1. Which of the following statements are true ? 10
Justify your answers.

(i) The function f given by $f(x) = x[x]$, is not differentiable at $x = 0$, where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$.

(ii) $\int \sin t^2 dt = -\cos \frac{t^3}{3} + C$.

(iii) If C is a point in the domain of a function f such that $f'(C) = 0$, then f has a maximum at C .

(iv) $\log_c(a+b) = \log_c a + \log_c b$, ($a, b, c > 0$).

(v) $y = \frac{2}{5}$ is the only asymptote of the curve

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 8}{5x^2 + 3x - 2}$$

2. (a) Given a function f defined by 4
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $l = 1$, $x_0 = 0$ and $\epsilon = 0.1$, find $\delta > 0$ such that $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.
- (b) Investigate, for maxima and minima the function f , given by 6
 $f(x) = \int_1^x [2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2] dt$
3. Trace the curve $y(a^2 + x^2) = a^2x$, $a > 0$. Clearly state all the properties used for tracing it. 10
4. (a) If $y = e^{m \cos^{-1} x}$, find $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} - m^2 y_n$. 4
- (b) Examine whether the functions f , given by 4
 $f(x) = \frac{2[x]}{3x - [x]}$, $x \neq 0$, is continuous at $x = -\frac{1}{2}$ and $x = 1$.
- (c) prove that $e^x - e^{-x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$. 2
5. (a) Obtain a reduction formula for 6
 $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$, $n > 1$.
- Hence prove that $I_3 = \frac{3}{4} \pi^2 - 6$.
- (b) Find the volume of the solid generated by a revolution of the cycloid $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ about the x -axis. 4

6. (a) An object starting from rest, moves along a straight line. Its velocity $v(t)$ (in mt/sec) at time t , as recorded in seconds for six seconds is given in the table below : 3

t	1	2	3	4	5	6
v(t)	3	4	6	5	5	3

Approximate the distance travelled by the object in 4 seconds using the trapezoidal rule.

- (b) Differentiate $\sin^{-1} \left(\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right)$ with respect to $x/2$. 2

- (c) Evaluate : $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ 3

- (d) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 5x + 5} \right]$, if it exists. 2

7. (a) Roughly sketch the region enclosed by the curves $y = \sin x$, $y = \cos x$ and the x -axis between $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$. Also find the area of this region. 4

- (b) Find the domain of the function f , defined by $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(7-x)}}$. 2

- (c) The cost of fuel in running an engine is proportional to the square of the speed in km/h and is Rs. 64 per hour when the speed is 16 km/h. Other costs amount to Rs. 100 per hour. Find the speed, which would minimize the cost. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न संख्या 1 करना जरूरी है। शेष प्रश्नों में से कोई चार प्रश्न कीजिए।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। 10

(i) $f(x)=x[x]$ द्वारा परिभाषित फलन f $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है जहाँ $[x]$, अधिकतम पूर्णांक $\leq x$ को दर्शाता है।

(ii) $\int \sin t^2 dt = -\cos \frac{t^3}{3} + C$.

(iii) यदि फलन f के प्रांत में एक बिंदु C इस प्रकार है कि $f'(C)=0$, तब C पर f उच्चिष्ठ होगा।

(iv) $\log_C(a+b) = \log_C a + \log_C b$, ($a, b, c > 0$).

(v) वक्र $y = \frac{2x^2 - 5x + 8}{5x^2 + 3x - 2}$ की एकमात्र अनंतस्पर्शी $y = \frac{2}{5}$ है।

2. (a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ द्वारा परिभाषित फलन f , $l=1$, 4
 $x_0=0$ और $\epsilon=0.1$ दिये गये हैं। $\delta > 0$ के वे मान
 ज्ञात कीजिए जिनके लिए
 $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$.
- (b) $f'(x) = \int_1^x [2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2] dt$ 6
 द्वारा परिभाषित फलन f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ
 बिन्दुओं की जांच कीजिए।
3. वक्र $y(a^2+x^2) = a^2x$, $a>0$ का अनुरेखण कीजिए। उन 10
 सभी गुणों को स्पष्ट रूप से बताइए, जिनका आपने अनुरेखण
 करने में प्रयोग किया।
4. (a) यदि $y = e^{m \cos^{-1} x}$. 4
 तब $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - m^2y_n$ ज्ञात
 कीजिए।
- (b) जाँच कीजिए कि 4
 $f(x) = \frac{2[x]}{3x-[x]}$, $x \neq 0$, द्वारा परिभाषित फलन f ,
 $x = -\frac{1}{2}$ और $x=1$ पर संतत है या नहीं
- (c) सिद्ध कीजिए कि : $e^x - e^{-x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$. 2
5. (a) $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$, $n > 1$. के लिए सामनयन सूत्र 6
 प्राप्त कीजिए। इस तरह सिद्ध कीजिए कि
 $I_3 = \frac{3}{4} \pi^2 - 6$.

- (b) चक्रज $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ के x -अक्ष के प्रति घूर्णन से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 4

6. (a) विराम से प्रारंभ करके एक वस्तु एक सीधी रेखा में चलती है। इसकी t समय में, प्रत्येक सेकेंड, 6 सेकेंडों तक ली गयी गति $v(t)$ (मी. / से. में) निम्न सारणी में दी गयी है। 3

t	1	2	3	4	5	6
v(t)	3	4	6	5	5	3

पहले 4 सेकेंडों में वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए समलंबी नियम का प्रयोग कीजिए।

- (b) $\frac{x}{2}$ के सापेक्ष $\sin^{-1} \left(\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right)$ का अवकलित 2
कीजिए।

- (c) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

- (d) यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 5x + 5} \right]$ 2

का अस्तित्व है, तो इसे ज्ञात कीजिए।

7. (a) वक्रों $y = \sin x$, $y = \cos x$ और x -अक्ष से घिरा $x = 0$ 4
और $x = \frac{\pi}{2}$ के बीच के क्षेत्र का मोटे तौर पर अनुरेखण
कीजिए। इस क्षेत्र का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(7-x)}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का 2
प्रांत ज्ञात कीजिए।

(c) एक इंजन को चलाने में लगे ईंधन की लागत गति (किमी प्रति घं. में) के वर्ग की समानुपाती हैं, और गति के 16 किमी प्रति घंटा होने पर लागत रू. 64 प्रति घंटा आती है। अन्य खर्चे रू. 100 प्रति घंटा आते हैं। सबसे कम खर्च वाली गति ज्ञात कीजिए। 4
