

BMTC-132

I =h; dk; Zi fLrdk

Lukrd mi kf/k dk; Øe
%ch-, I I h-th@ch-, -th½

vody I ehdj.k

1 tuojh 2021 I s 31 fnl æj 2021 rd oŷk



foKku fo | ki hB
bfUnjk xka/kh jk"Vh; eØr fo' ofo | ky;
eŷnku x<h] ubl fnYyh-110 068
(2021)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको , d l =h; dk; l करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

l =h; dk; l l s l cf/kr funk

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या.....

नाम :

पता :

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

dk; l ds l gh vkj 'kh?k eW; kdu ds fy, fn, x, ik: i dk l gh vuq j.k djA

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2021 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2021 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2022 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

'kdkdkeukvka ds l kFA

सत्रीय कार्य

i kB; Øe dM: **BMTC-132**
l =h; dk; l dM : **BMTC-132/TMA/2021**
vf/kdre v d : **100**

Hkkx d (30 v d)

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (10)

क) $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $(2, 3, -1)$ पर अवकलनीय है।

ख) फलन $f(x, y) = \max\left\{\frac{y}{x}, x\right\}$, \mathbf{R}^2 में एक समघात फलन है।

ग) रेखा $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$ बिंदु $(4, 2, 3)$ से गुजरती है।

घ) $f(x, y) = 2xy$ और $g(x, y) = x^2 + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन f/g का परिसर \mathbf{R}^2 है।

ड) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{y}$ का अस्तित्व है।

2. क) निम्नलिखित पृष्ठों को गोलाकार निर्देशांको में दर्शाइए : (2)

i) $xz = 3$

ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

ख) निम्नलिखित बिन्दुओं के बेलनाकार निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिनके कार्तीय निर्देशांक हैं : (2)

i) $(6, 6, 8)$

ii) $(\sqrt{2}, 1, 1)$

ग) दिखाइए कि \mathbf{R}^3 में केन्द्र $(2, 3, 7)$ और त्रिज्या 10 वाला संवृत गोला, विवृत

घन $P = \{(x, y, z) : |x-2| < 11, |y-3| < 11, |z-7| < 11\}$ में आविष्ट है। (3)

घ) दिखाइए कि $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर फलन $f(x, y) = \frac{3x^3y}{x^6 + 2y^2}$ की सीमा का अस्तित्व नहीं

होता। (3)

3. क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{4x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$ पर संतत है या नहीं ? (2)

ख) निम्नलिखित फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ के लिए $f_x(0, 0)$ और $f_x(x, y)$ जहाँ $(x, y) \neq (0, 0)$ की जाँच

कीजिए।

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या f_x , $(0, 0)$ पर संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

ग) $(1, 2)$ पर फलन $f(x, y) = e^{x+y} \sin x + 9x^2 + 2xy$ के लिए f_{xy} और f_{yx} परिकलित कीजिए। (2)

घ) श्रृंखला नियम से $z = x^2y + 4y^2$ के लिए $\frac{dz}{dt}$ परिकलित कीजिए जहाँ $x = \cos t$ और $y = \sin t$ है। (2)

Hkkx [k (40 vcd)

4) बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदहरण से कीजिए। (10)

i) n के पूर्णांक मानों के लिए $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ एक रैखिक समीकरण है।

ii) $y = 0$ अवकल समीकरण $27y - 8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ का एक विचित्र हल है।

iii) $\frac{1}{xy^2 + y^4}$ अवकल समीकरण $(x^2y + y^2)dx + (y^3 - x^3)dy = 0$ के लिए एक समाकलन गुणक है।

iv) समीकरण $x^2(y - px) = yp^2$ क्लेरों रूप में समानेय है।

v) $2e^x, y' - y = 2e^x$ के लिए एक विशेष समाकल है।

5) क) b का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$ यथातथ है। (2)

ख) रिकेटी समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}; y_1(x) = \sin x$$

का हल ज्ञात कीजिए। (3)

6) क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \sin x$ को हल कीजिए। (3)

ख) अवकल समीकरण

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, x > 0$$

के एक दिए हुए हल $y_1(x) = x^{-1}$ के लिए एक रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात कीजिए। (2)

7) क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2} \right) y = x\sqrt{y}, y(0) = 1$$

को हल कीजिए।

(3)

ख) प्राचल विचरण विधि से समीकरण $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^5 e^x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(3)

ग) निम्नलिखित आदिमान समस्या को हल कीजिए।

(4)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -6 \sin 2x - 18 \cos 2x$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 2$$

8) क) अवकल समीकरण $y = xy' + 1 - \ln y'$ का प्रकार पहचानिए, और इस प्रकार इसे हल कीजिए।

(3)

ख) अनिर्धारित गुणांक विधि से अवकल समीकरण

$$y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' = 3e^{-x} + 2e^{-x}x + e^{-x} \sin x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(3)

ग) एक सरल श्रेणी परिपथ में 1 हेनरी का प्रेरक, 10^{-6} फराडे का संधारित्र है और 1000 ओम का प्रतिरोधक है। संधारित्र का प्रारंभिक आवेश शून्य है। यदि परिपथ से एक 12 वोल्ट की बैटरी लगा दी जाती है और परिपथ $t=0$ पर बंद कर दिया जाता है तो संधारित्र पर 1 सैकण्ड बाद का आवेश और स्थायी अवस्था आवेश ज्ञात कीजिए।

(4)

हकx x (30 vद)

9) क) जाँच कीजिए कि अवकल समीकरण $\cos(x+y)p + \sin(x+y)q = z^2 + z$ रैखिक-कल्प है या नहीं।

(2)

ख) आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ को हल कीजिए।

(2)

ग) $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0$ एक अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है। सत्य है या असत्य? पुष्टि

कीजिए।

(2)

घ) समीकरण

$$(x-y)p + (y-x-z)q = z$$

का व्यापक समाकल, और वृत्त $z=1, x^2 + y^2 = 1$ से गुज़रने वाला एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

(4)

10) क) सत्यापित कीजिए कि संपूर्ण अवकल समीकरण

$$yz dx + (x^2 y - zx) dy + (x^2 z - xy) dz = 0$$

समाकलनीय है, और इसीलिए इसका समाकल ज्ञात कीजिए। (3)

ख) दिखाइए कि $2z = (ax + y)^2 + b$, जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं, $px + qy - q^2 = 0$ का संपूर्ण समाकल है। (3)

ग) $\phi\left(\frac{z}{x^3}, \frac{y}{z}\right) = 0$ से उत्पन्न होने वाला आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ एक स्वेच्छ फलन है। प्राप्त आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल भी ज्ञात कीजिए। (4)

11) क) उस समष्टि वक्र का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पृष्ठों $u = x^2 - y^2 = c_1$ और $v = y^2 - z^2 = c_2$ के दो कुल प्रतिच्छेद करते हों। (2)

ख) जब आंशिक अवकल समीकरण $p^2 - q^2 = 4$ का पूर्ण समाकल $z = ax + \sqrt{a^2 - 4}y + c$ दिया हो तब इसका व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए। (2)

ग) सत्यापित कीजिए कि समीकरण

i) $z = \sqrt{2x + a} + \sqrt{2y + b}$ और

ii) $z^2 + \mu = 2(1 + \lambda^{-1})(x + \lambda y)$

दोनों आंशिक अवकल समीकरण $z = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ के पूर्ण समाकल हैं। यह भी दिखाइए कि पूर्ण

समाकल (ii) हल (i) में $b = \frac{-a}{\lambda} - \frac{\mu}{1 + \lambda}$ लेकर प्राप्त एक-प्राचल उप-तंत्र का आन्वालोप है। (6)