

BMTC-132

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

बी.एससी. जी./बी.ए.जी.

अवकल समीकरण

01 जनवरी 2020 से 31 दिसम्बर, 2020 तक वैध



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2020

प्रिय विद्यार्थी,

आपके नामांकन के बाद हमने आपको स्नातक उपाधि कार्यक्रम की कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं, सतत मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको इस पाठ्यक्रम का **एक सत्रीय कार्य** हल करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है और इसमें तीन भाग हैं, भाग क, भाग ख और भाग ग। यह इस पाठ्यक्रम के सभी खंडों को कवर करता है। तीनों भागों के कुल अंक 100 हैं। सत्रीय कार्य में उत्तीर्ण होने के लिए आपको 35% अंक चाहिए।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

सत्रीय कार्य के प्रश्नों के उत्तर लिखने से पहले, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

- 1) अपनी TMA उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम कोड :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य कोड :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपने उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर सटीक और अपने शब्दों में होने चाहिए।
- 5) इस सत्रीय कार्य के भाग क, भाग ख और भाग ग को हल करें, और **तीनों भागों सहित संपूर्ण सत्रीय कार्य को वैध तिथि के भीतर अपने अध्ययन केन्द्र में जमा कर दें।**
- 6) आपको अपनी सत्रीय कार्य उत्तर पुस्तिका दिए गए समय के भीतर जमा करनी है। **वैध तिथि के बाद सत्रीय कार्य उत्तर पुस्तिका नहीं ली जायेगी।**
हमारा सुझाव है कि आप अपने सत्रीय कार्य की एक प्रति अपने पास सुरक्षित रखें।
- 7) यह सत्रीय कार्य **1 जनवरी, 2020 से 31 दिसम्बर, 2020 तक वैध** है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में उत्तीर्ण नहीं हो पाते या इसे 31 दिसम्बर, 2020 से पहले जमा नहीं कर पाते तो फिर आपको **2021** का सत्रीय कार्य करना होगा और कार्यक्रम दर्शिका में दिए गए निर्देशों के अनुसार इसे जमा करना होगा।
- 8) यदि आप इस सत्रीय कार्य को जमा नहीं करेंगे तो आप **इस पाठ्यक्रम का सत्रांत परीक्षा फार्म जमा नहीं कर सकेंगे।**

हमारी शुभकामनाएँ आपके साथ हैं।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: **BMTC-132**
सत्रीय कार्य कोड : **BMTC-132/TMA/2020**
अधिकतम अंक : **100**

भाग क (30 अंक)

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (6)

क) $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $(2, 3, -1)$ पर अवकलनीय है।

ख) फलन $f(x, y) = \max\left\{\frac{y}{x}, x\right\}$, \mathbf{R}^2 में एक समघात फलन है।

ग) $f(x, y) = 2xy$ और $g(x, y) = x^2 + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन f/g का परिसर \mathbf{R}^2 है।

2. क) निम्नलिखित पृष्ठों को गोलाकार निर्देशांको में दर्शाइए : (2)

i) $xz = 3$

ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

ख) निम्नलिखित बिन्दुओं का बेलनाकार निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिनके कार्तीय निर्देशांक हैं : (2)

i) $(6, 6, 8)$

ii) $(\sqrt{2}, 1, 1)$

ग) दिखाइए कि \mathbf{R}^3 में केन्द्र $(2, 3, 7)$ और त्रिज्या 10 वाला संवृत गोला, विवृत घन $P = \{(x, y, z) : |x-2| < 11, |y-3| < 11, |z-7| < 11\}$ में आविष्ट है। (3)

घ) दिखाइए कि $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर फलन $f(x, y) = \frac{3x^3y}{x^6 + 2y^2}$ की सीमा का अस्तित्व नहीं होता। (3)

ड.) $(0, 0)$ पर फलन $f(x, y) = \left(\frac{y-x}{y+x}\right)\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)$ का दोनों पुनरावृत्त सीमाएं ज्ञात कीजिए। क्या $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर फलन f के युगपत् सीमा का अस्तित्व है? अपने उत्तर के कारण बताइए। (3)

3. क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{4x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$ पर संतत है या नहीं ? (3)

ख) निम्नलिखित फलन के लिए $f_x(0, 0)$ और $f_x(x, y)$ जहाँ $(x, y) \neq (0, 0)$ की जाँच कीजिए।

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या $f_x, (0, 0)$ पर संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

ग) बिन्दु (1,2) पर फलन $f(x,y) = e^{x+y} \sin x + 9x^2 + 2xy$ के लिए f_{xy} और f_{yx} परिकलित कीजिए। (2)

घ) श्रृंखला नियम से $z = x^2y + 4y^2$ के लिए $\frac{dz}{dt}$ परिकलित कीजिए जहाँ $x = \cos t$ और $y = \sin t$ है। (2)

भाग ख (40 अंक)

4) बताइए निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य? प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) समीकरण $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, n के पूर्णांक मानों के लिए एक रैखिक समीकरण है।

ii) $y = 0$, अवकल समीकरण $27y - 8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ का विचित्र हल है।

iii) समीकरण $x^2(y - px) = yp^2$ को क्लेरो रूप में समानीत किया जा सकता है। (6)

5) क) b का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण

$$(ye^{2xy} + x) dx + bxe^{2xy} dy = 0$$

यथातथ हो। b के प्राप्त मान के लिए समीकरण का हल ज्ञात कीजिए। (3)

ख) रिकेटी समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}; y_1(x) = \sin x, \text{ का हल ज्ञात कीजिए।} \quad (3)$$

6) क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \sin x \text{ का हल प्राप्त कीजिए।} \quad (3)$$

ख) यदि $y_1(x) = x^{-1}$ अवकल समीकरण

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, x > 0, \text{ का एक हल हो, तो समीकरण का दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात कीजिए।} \quad (3)$$

7) क) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right)y = x\sqrt{y}, y(0) = 1 \text{ का हल प्राप्त कीजिए।} \quad (3)$$

ख) खुली हवा में एक गीला संरघ (porous) पदार्थ उसमें उपस्थित नमी की मात्रा के समानुपाती दर से नमी खो देता है। यदि हवा में सूख रही एक चादर पहले घंटे में अपनी आधी नमी खो देती हो, तो वह समय ज्ञात कीजिए जिसमें वह 95% नमी खो देगी जबकि मौसम अवरथा एक सी बनी रहती हो। (3)

8) क) प्राचल विचरण विधि से अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x} \text{ का हल ज्ञात कीजिए।} \quad (3)$$

ख) निम्नलिखित आदि मान समस्या का हल प्राप्त कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -6 \sin 2x - 18 \cos 2x$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 2. \quad (4)$$

9) क) अवकल समीकरण $y = xy' + 1 - \ln y'$ के प्रकार को पहचानिए और इसे हल कीजिए। (2)

ख) अनिर्धारित गुणांक-विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

$$y^{iv} - 2y''' + 2y'' = 3e^{-x} + 2e^{-x}x + e^{-x} \sin x. \quad (3)$$

ग) एक साधारण श्रेणी परिपथ में 1 हेनरी का एक प्रेरक, 10^{-6} फ़ैरड का एक संघरित्र और 1000 ओम का एक प्रतिरोधक लगा है। प्रेरक पर प्रारंभिक आवेश शून्य है। यदि परिपथ में एक 12 वोल्ट की बैटरी लगा दी जाए और $t = 0$, पर परिपथ बंद कर दिया जाए तो 1 सेकंड बाद प्रेरक पर आवेश और स्थायी अवस्था आवेश ज्ञात कीजिए। (4)

भाग ग (30 अंक)

10) बताइए निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य? प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) समीकरण $\cos(x+y)p + \sin(x+y)q = z^2 + z$ रैखिककल्प समीकरण है।

ii) आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ का हल $z = -[y + f(x-y)]$ है।

iii) समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$ एक अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है। (6)

11) क) उन आकाश वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें दो पृष्ठ-कुल $u = x^2 - y^2 = c_1$ और $v = y^2 - z^2 = c_2$ प्रतिच्छेद करते हैं। (2)

ख) समीकरण $(x-y)p + (y-x-z)q = z$ का व्यापक समाकल और वृत्त $z=1, x^2 + y^2 = 1$ से होकर जाने वाला विशेष समाकल ज्ञात कीजिए। (4)

12) सत्यापित कीजिए कि दोनों ही समीकरण

i) $z = \sqrt{2x+a} + \sqrt{2y+b}$ और

ii) $z^2 + \mu = 2(1 + \lambda^{-1})(x + \lambda y)$

आंशिक अवकल समीकरण $z = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ के पूर्ण समाकल हैं। यह भी दिखाइए कि पूर्ण समाकल (ii)

हल (i) में $b = \frac{-a}{\lambda} - \frac{\mu}{1+\lambda}$ रखने से प्राप्त हुए प्राचल उपनिकाय का अन्वालोप है। (6)

13) क) जांच कीजिए कि अवकल समीकरण

$$yz dx + (x^2y - zx) dy + (x^2z - xy) dz = 0$$

समाकलनीय है और फिर इसका समाकल ज्ञात कीजिए। (3)

ख) दिखाइए कि $2z = (ax + y)^2 + b$, जहां a, b स्वेच्छ अचर है; समीकरण $px + qy - q^2 = 0$ का पूर्ण समाकल है। (3)

14) क) $\phi \left[\frac{z}{x^3}, \frac{y}{z} \right] = 0$, से उत्पन्न आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहां ϕ स्वतंत्र चरों का एक स्वेच्छ फलन है। इस तरह प्राप्त आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल भी ज्ञात कीजिए। (4)

ख) यदि $z = ax + \sqrt{a^2 - 4}y + c$, आंशिक अवकल समीकरण $p^2 - q^2 = 4$ का पूर्ण समाकल हो तो समीकरण का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए। (2)