BMTE-141

सत्रीय कार्य पुस्तिका

(1st July, 2021 से 31st June, 2022 तक वैध)

BSCG/BAG

रैखिक बीज गणित

विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गंधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढी, नई दिल्लि
(2021)

प्रिय विद्यार्थी,
हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्षिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रष्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देषों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारुप के आधार पर विवरण लिखें।:

नामांकन संख्या : ....
नाम : ....
पता: ....
....
....
पाठ्यक्रम संख्या : ....
पाठ्यक्रम शीर्षक: ....
अध्ययन केंद्र : ....   **DATE** ....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारुप का सही अनुसरण करें।।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक काग़ज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।।

5) प्रशनों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रशनका कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) **सत्रीय कार्य को कुद हल करें। अपने साथी छात्रों या इंटरनेट से कॉपी न करें। यदि आप नकल करने के दोषी पाए जाते हैं, तो आपका असाइनमेंट अयोग्य घोषित कर दिया जाएगा और आपको अगले सत्र के लिए असाइनमेंट जमा करना होगा।**

7) यह सत्रीय कार्य अध्ययन केन्द्र द्वारा निर्धारित कार्यक्रम के अनुसार अध्ययन केन्द्र में जमा करना होता है। नियत तिथि के बाद प्राप्त उत्तर पुस्तिकाओं को स्वीकार नहीं किया जाएगा।

8) यह सत्रीय कार्य केवल जून, 2022 तक वैध है। यदि आप इसमें असफल होते हैं या जून, 2022 तक इसे जमा करने में विफल, तो आपको चाहिए वर्ष 2022 के लिए नया असाइनमेंट प्राप्त करें और उस सत्रीय कार्य में दिए गए निर्देशों के अनुसार जमा करें।

9) **परीक्षा फार्म बर्नें से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रुरि है।**

10) हम पुरज़ोर सुझाव देते हैं कि आप अपने असाइनमेंट प्रत्युत्तर की एक प्रति अपने पास रखें।

सुभ काम्नाआँ के सात।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: BMTE-141
सत्रीय कार्य कोड: BMTE-141/TMA/2021
अधिकतं अंक: 100

PART - A (30 Marks)

1) i) सदिशों $\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ और $\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।. (2)

ii) बिंदुआँ $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ और $(-1, 1, 0)$ द्वारा निर्धारित समतल की सदिश समीकरण ज्ञात कीजिये ।. (2)

iii) जाँच कीजिये कि $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + y - z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$ की उप सम्ष्टि है या नहीं। (2)

iv) जाँच कीजिये कि $\mathbb{P}^3$ में, जो कोटि 3 य उस से कम वाले बहुपदों की सदिश स्मष्टि है, सदिशों की शमष्टि $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^3\}$ रैखिकतः स्वतंत्र है।. (2)

v) जाँच कीजिये कि $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, जो $T(x, y) = (-y, x)$ द्वारा परिभाषित है, एक रैखिक रूपांतरण है। (2)

vi) यदि $\{v_1, v_2\}$ $\mathbb{R}^2$ का एक क्रमित आधार है और $\{f_1(v), f_2(v)\}$ इस का संगत द्वैत आधार है तो $f_1(2v_1 + v_2)$ और $f_2(v_1 - 2v_2)$ निकालिये। (2)

vii) रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ की अष्टि ज्ञात कीजिये, जो $T(x, y) = (2x + 3y, 2x - 3y)$ द्वारा परिभाषित है,। (2)

viii) उस रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ को वर्णन कीजिये जिस् के लिये

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

है जहाँ B $\mathbb{R}^2$ के मानक आधार है। (2)

ix) रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ के क्रमित आधार $\{(0, -1), (-1, 0)\}$ के सापेक्ष आव्यूह निकालिये, जो $T(x, y) = (2y, x - y)$ द्वारा परिभाषित है,।. (2)

x) मान लीजिये कि A एक 2×3 आव्युह है, B एक 3×4 आव्यूह है, C एक 3×2 आव्यूह है और D एक 3×4 आव्यूह है। क्या $AB + C^t D$ परिभाषित है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये। (2)

xi) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ के लिये कैली-हैल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिये। (2)

xii) जाँच कीजिये कि $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगेंसदिश है। संगत आईगेमान क्या है? (2)

xiii) मान लीजिये कि $C[0, 1]$ अंतराल $[0, 1]$ पर आंतर गुणन फलन

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

के सापेक्ष वास्तविक मान वाले संततः फलनों के आंतर गुणन समष्टि है। फलनों $f(t) = 2t$, $g(t) = \dfrac{1}{t^2 + 5}$ आंतर गुणन फल ज्ञात कीजिये। (2)

xiv) रैखिक संकारक $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, जो $T(z_1, z_2) = (z_2, z_1 + iz_2)$ द्वारा परिभाषित है, का $\mathbb{C}^2$ पर मानक अंतर गुणन के सापेक्ष संलग्न निकालिये। (2)

xv) द्विघाति समघात $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$ का चिह्नक इकालिये। (2)

Part-B (40 Marks)

1) a) मान लीजिये कि S कोई भी एक अरिक्त समुच्चय है और $V(S)$, S पर सभी वास्तविक मान वाले फलनोँ का समुच्चय है। $V(S)$ पर योग $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभषित कीजिये और आदिश गुणन $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ द्वारा परिभषित कीजिये। जाँच कीजिये कि $V(S), +, \cdot)$ एक सदिश समष्टि है। (7)

b) जाँच कीजिये कि $B = \{1, 2x+1, (x-1)^2\}$, $\mathbf{P}_2$ के लिये एक आधार है जहाँ $\mathbf{P}^2$ अधिक से अधिक कोटि 2 वाले वास्तविक गुणाँक बहुपदों की सदिश समष्टि है। (3)

2) a) मान लीजिये कि $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक संकारक है ओर क्रमित आधार

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

के सापेक्ष उसका आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है। क्रमित आधार

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ (6)

के सापेक्ष T का आव्यूह निकालिये।।

b) दिखाइये कि $W = \{(x, 4x, 3x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}^3$ की एक उपसमष्टि है। $\mathbb{R}^3$ की उपस्मष्टि U का आधार भी ज्ञात कीजिये, जो $W \oplus U = \mathbb{R}^3$, को संतुष्ट करती है। (4)

3) a) आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगेमान और आइगेंसदिश ज्ञात कीजिये। क्या यह आव्यूह विकर्णनीय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये। (5)

b) Adj(A) ज्ञात कीजिये, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. इस से A^{-1} निकालिये। (5)

4) a) निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रमर नियम से हल कीजिये:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$$ (5)

b) आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (5)

की अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिये।

Part C (30 marks)

1) a) मान लीजिये कि V, $\mathbb{R}$ पर ऐसे सभी वास्तविक मान वाले फलनोँ की सदिश समष्टि है जो दो बार अवकलनीय है। जाँच कीजिए कि S $\mathbb{R}$पर रैखिकत: स्वतंत्र है। (**संकेत:** समीकरण

$$a_0 \cos x + a_1 \sin x + a_2 x \cos x + a_3 x \sin x = 0$$

लीजिये। $x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, इत्यादि रखिये और a_i निकालिये।) (4)

b) रैखिक समीकरण $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ लीजिये जो

$$T\left(z_1, z_2, z_3\right) = \left(z_1 - iz_2, iz_1 - 2z_2 + iz_3, -iz_2 + z_3\right).$$

द्वारा परिभषित है।

i) T^* परिकलित कीजिये और जाँच कीजिये कि T स्वसंलग्न है।

ii) जाँच कीजिये कि T ऐकिक है। (6)

2) a) मान लीजिये कि $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ और $\left(y_1, y_2, y_3\right)$ आधारों $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष निर्देशांकों को निरुपित करते हैं। यदि

$$Q(X) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

$\left(y_1, y_2, y_3\right)$ के पदों में Q को निरूपण निकालिये। (3)

b) द्विघाति समघात $-x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz$ का लाम्बिक विहित समानयन और इस के मुक्य अक्ष निकालिये। (7)

3) निम्न लिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिये। (10)

i) यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमा, शून्येत्तर सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं और $\dim(W_1) > \frac{\dim(V)}{2}$, $\dim(W_2) > \frac{\dim(V)}{2}$, तो $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

ii) यदि V एक सदिश सम्ष्टि है और $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, $n \geq 3$, एक ऐसा समुच्चय हैजिस में $v_i \neq v_j$ यदि $i \neq j$, तो S एक रैखिकत: स्वतंत्र समुच्चय है।

iii) यदि $T_1, T_2 : V \to V$ एक परिमित विमा V और $T_1 \circ T_2$ व्युत्क्रमणीय हैं, तो $T_2 \circ T_1$ भी वव्युत्क्रमणीय है।

iv) यदि एक $n \times n$, $n \geq 2$, वर्गीय आव्यूह विकर्णनीय है, तो इस के अल्पिष्ट बहुपद और अभिलक्षणिक बहुपद बराबर है।

v) यदि $T_1, T_2 : V \to V$ एक परिमित विमा सदिश समष्टि V पर स्वसंलग्न संकारक है, तो $T_1 + T_2$ भी स्वसंलग्न है।