

MTE-07

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम. टी. ई. – 07

उच्च कलन

(01 जनवरी, 2021 से 31 दिसंबर, 2021 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।



**विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068**

2021

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2021 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2021 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2022 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : एम टी इ - 07

सत्रीय कार्य कोड : एम टी इ - 07/ टी एम ए / 2021

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। (10)

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 1$

(ii) तीन चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन, जो सर्वत्र संतत है, अवकलनीय होता है।

(iii) $F(x, y) = (y + 2, x + y)$ से परिभाषित फलन $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ किसी भी बिन्दु $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है।

(iv) $f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{यदि } y \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } y \text{ परिमेय नहीं है,} \end{cases}$

से परिभाषित फलन $f : [-1, 1] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ समाकलनीय होता है।

(v) $f(x, y) = 1 - y^2 + x^2$ से परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ का $(0, 0)$ पर एक चरम मान होता है।

- 2) (क) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए : (4)

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{8x^2 - 3} \right)^{1/3}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

(ख) बिन्दु $(1, 2)$ पर फलन $f(x, y) = 1 + 5xy + 3^2 y$ का तृतीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। (3)

(ग) केवल परिभाषाओं को लागू करके $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए, जबकि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases} \quad (3)$$

के लिए इनका अस्तित्व होता हो।

- 3) (क) मान लीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y^4}{x^4 + y^8}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दिखाइए कि $(0, 0)$ पर सभी दिशाओं में f दिक् अवकलज होते हैं। (3)

(ख) मान लीजिए $x = e^r \cos \theta$, $y = e^r \sin \theta$ और f x और y का एक संततः अवकलनीय फलन है जिसके आंशिक अवकलज भी संततः अवकलनीय हैं। दिखाइए कि

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

(ग) मान लीजिए $a = (1, 2, 3)$, $b = (-5, 3, -2)$, $c = (2, -4, 1)$, \mathbf{R}^3 के तीन बिन्दु हैं।
 $|2b - a + 3c|$ ज्ञात कीजिए। (2)

4. (क) वक्रों $y = 4x^2$ और $x = 4$ से परिवद्ध और $\delta(x, y) = y$ के घनत्व वाले एक पतली शीट का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) $z = 1$ और $z = x^2 + y^2$ से परिवद्ध ठोस घनाकृति का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि घनत्व फलन,
 $\delta(x, y, z) = |x|$ हो। (5)

5. (क) ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिए और इसकी सहायता से

$$\int_C (3x^2 - 4y)dx - (2x + y^3)dy \text{ का मान निकालिए,}$$

जहाँ C , दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ है। (4)

(ख) पृष्ठ $x^2 + 2y^2 = 1$ पर फलन $f(x, y) = x^2 + y$ के चरम मान ज्ञात कीजिए। (6)

6. (क) \mathbf{R}^2 के एक विवृत उपसमुच्चय D पर दो अवकलनीय फलनों f और g की फलनक आश्रितता का आवश्यक प्रतिबंध बताने वाले प्रमेय का कथन दीजिए। निम्नलिखित फलनों f तथा g द्वारा परिभाषित इस प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

$$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}, g(x, y) = \frac{x}{y} \quad (4)$$

(ख) अस्पष्ट फलन प्रमेय की सहायता से यह दिखाइए कि 1 के प्रतिवेश में एक ऐसा अवकलनीय फलन g होता है, जिससे कि $(2, 1)$ के प्रतिवेश में $g(1) = 2$ और $F(g(y), y) = 0$ जहाँ

$$F(x, y) = x^5 + y^5 - 16xy^3 - 1 = 0 \text{ से फलन } F \text{ परिभाषित है। } g'(y) \text{ भी ज्ञात कीजिए।} \quad (3)$$

(ग) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ द्वारा परिभाषित फलन f की $(1, -1)$ पर स्थानीय व्युत्क्रमणीयता की जाँच कीजिए। फलन f के लिए एक प्रांत ज्ञात कीजिए जिसमें f व्युत्क्रमणीय है। (3)

7. (क) $(0, 0)$ पर निम्नलिखित फलन f के सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच कीजिए, जहाँ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases} \quad (6)$$

(ख) फलन $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ से परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। इस फलन के दो स्तर वक्र भी ज्ञात कीजिए। (4)

8. (क) $\int_C (2x^2 + 3y^2) dx$ के मान निकालिए, जहाँ C $x(t) = at^2$, $y(t) = 2at$, $0 \leq t \leq 1$ से प्राप्त वक्र है। (5)

(ख) द्विशः समाकलन का प्रयोग करके दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \text{ का आयतन ज्ञात कीजिए।} \quad (5)$$

9. (क) यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ तो a और b के मान ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) मान लीजिए कि S और $C \subset \mathbf{R}^3$ के उपसमुच्चय हैं। S मूल-बिन्दु पर केन्द्र वाला एकक विवृत गोलक है तथा C विवृत घन $= \{P(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$. (3)

निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $S \subset C$

(ii) $C \subset S$

(ग) निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र ज्ञात कीजिए : (2)

(i) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(iii) $x - y$

(iv) y/x

10. (क) क्या निम्नलिखित फलन $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x \neq 0, y \neq 0$ श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को (1,1) पर संतुष्ट करता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

(ख) निम्नलिखित के स्तब्ध बिन्दु निर्धारित करके उनका वर्गीकरण कीजिए : (6)

(i) $f(x, y) = 4xy + x^4 - y^4$

(ii) $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}, x > 0, y > 0$