MTE-06

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

अमूर्त बीजगणित

(1 जनवरी, 2021 से 31 दिसंबर, 2021 तक वैध)

सत्रांत परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।

इग्नू जन-जन का विश्वविद्यालय

विज्ञान विद्यापीठ

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विष्वविद्यालय

मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-**110 068**

(2021)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्षिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ……………………………..

नाम : ……………………………..

पता : ……………………………..

……………………………..

……………………………..

पाठ्यक्रम संख्या : ……………………………….

पाठ्यक्रम शीर्षक : ……………………………….

सत्रीय कार्य संख्या : ……………………………….

अध्ययन केंद्र : ……………………………….   दिनांक :

……………………........

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) **यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2021 तक वैध** है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2021 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप अगले सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामानाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

(खंड 1, 2 और 3 को पढ़ने के बाद ही इसे कीजिए।)

कोर्स कोड : एम टी ई - **06**
असाइनमेंट कोड : एम टी ई - **06**/ टी एम ए / **2021**
अधिकतम अंक : **100**

1) निम्न कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (इसका अर्थ है कि यदि आप सोचते हैं कि एक कथन असत्य है, तो एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक उदाहरण ऐसा दीजिए जो यह दर्शाए कि वह असत्य है। यदि वह सत्य है, तो ऐसा कहने के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति दीजिए।)

   i) यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subseteq B$, तो $A \times B = B$ होगा।

   ii) यदि S उन व्यक्तियों का समुच्चय है जो 2016 में इग्नू के विद्यार्थी हैं तथा T उन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जो 2.5 और 2.55 के बीच स्थित है, तो $S \cup T$ एक अनंत समुच्चय होगा।

   iii) समुच्चय $\{x \in \mathbb{Z} | x \equiv 1 (\text{mod } 30)\}$ गुणन (mod 30) के सापेक्ष एक समूह है।

   iv) यदि G एक आबेली विभाग समूह G/N वाला समूह है, तब N आबेली होगा।

   v) एक ऐसा समूह समाकारिता f है जिसके लिए $\text{Ker } f \simeq \mathbb{R}$ और $\text{Im} f \simeq \{0\}$.

   vi) S_{35} के विषम क्रमचयों तथा S_{35} के सम क्रमचयों के बीच एकैक संगति है।

   vii) यदि R एक ऐसा वलय है कि $\forall a \in R$ के लिए $a = -a$ है, तो R बूलीय है।

   viii) किसी भी वलय R के लिए, R की एक ऐसी गुणजावली I होती है जिसके लिए R/I क्रमविनिमेय है।

   ix) यदि S एक वलय R की एक गुणजावली है तथा f वलय R से वलय R तक एक वलय समाकारिता है, तब $f^{-1}(f(S)) = S$ होता है।

   x) 'वलय' को, हम अब जिस तरह परिभाषित करते हैं, हमें सर्वप्रथम डेडेकिंड द्वारा प्रस्तुत किया गया था। (20)

2) क) सिद्ध कीजिए कि, $n \geq 5$ के लिए, $2^n > 4n$. (3)

   ख) प्रॉंत $\mathbb{Z} \setminus \{2,3\}$ और सह–प्रॉंत $\mathbb{N}$ वाले एक फलन का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए। क्या यह फलन 1 – 1है? क्या यह आच्छादक है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। (4)

   ग) गणन संख्या 5 वाला (अर्थात् अवयवों की संख्या 5 वाला) एक ऐसा समुच्चय दीजिए जो $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ का उपसमुच्चय हो। (1)

घ) जाँच कीजिए कि क्या संबंध $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid xy$ एक पूर्णांक का वर्ग है$\}$, $\mathbb{N}$ पर एक तुल्यता संबंध है। (2)

3) क) नीचे दी सारणी, समूह $(\{e,a,b,c,d\},*)$ के लिए एक केली सारणी है। इसमें दिखाए गए रिक्त स्थानों को भरिए।

*	e	a	b	c	d
e	e	-	-	-	-
a	-	b	-	-	e
b	-	c	d	e	-
c	-	d	-	a	b
d	-	-	-	-	-

(3)

ख) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है। दर्शाइए कि G के ऐसे अवयवों g की संख्या विषम है, जिनके लिए $g^3=e$ है, जहाँ e समूह G का तत्समक है। (3)

ग) जाँच कीजिए कि क्या $\left\{\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ आव्यूह गुणन के सापेक्ष एक आबेली समूह है। (4)

4) क) जाँच कीजिए कि क्या $H=\{x\in\mathbb{R}^* \mid x=1$ या x vifjes; g$\}$ तथा $K=\{x\in\mathbb{R}^* \mid x\geq 1\}$, $(\mathbb{R}^*,.)$ के उपसमूह हैं। (3)

ख) मान लीजिए कि $U(n)=\{m\in\mathbb{N} \mid (m,n)=1, m\leq n\}$ है। तब, U(n) गुणन मॉडूलो n के सापेक्ष एक समूह है। प्रत्येक $m\in U(10)$ के लिए, <m> की कोटियाँ ज्ञात कीजिए। (3)

ग) $Z(D_{2n})$ ज्ञात कीजिए, जहाँ D_{2n} अवयवों 2n वाला द्वितल समूह है :

i) जब n एक विषम पूर्णांक है;
ii) जब n एक सम पूर्णांक है। (4)

5. क) A_4 में $V_4=\{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ के सभी वाम सहसमुच्चय प्राप्त कीजिए। (3)

ख) यदि G एक समूह है जिसके लिए $o(G)<100$ तथा G के कोटियों 10 और 25 वाले उपसमूह हैं, तो G की कोटि क्या होगी? (2)

ग) दर्शाइए कि विषम कोटि वाले समूह G में, समीकरण $x^2=e$ का एक अद्वितीय हल है। इसके आगे, दर्शाइए कि $\forall g\in G, g\neq e$ के लिए, $x^2=g$ का एक अद्वितीय हल है। (5)

6. क) जाँच कीजिए कि क्या D_{2n} में परावर्तनों का उपसमूह और घूर्णनों का उपसमूह D_{2n} में प्रसामान्य है या नहीं।
(याद कीजिए कि D_{2n} एक n भुजाओं वाले बहुभुज की सममितियों का समूह होता है।) (3)

ख) अंतर्विरोध द्वारा, सिद्ध कीजिए कि A_4 का कोटि 6 वाला कोई उपसमूह नहीं है। (3)

ग) निम्न की कोटियाँ क्या हैं?

i) 14 in $\mathbb{Z}_{24}/\langle \overline{8} \rangle$?

ii) $(\mathbb{Z}_{10} \oplus U(10))/<(2,9)>$? (4)

7. क) क्या $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ से $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ पर कोई आच्छादक समाकारिता हो सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। (2)

ख) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n : f(x) = (x \bmod m, x \bmod n), m, n \in \mathbb{N}$ परिभाषित कीजिए।

i) यदि $(m, n) = (3, 4)$, तो Ker f ज्ञात कीजिए।
ii) यदि $(m, n) = (6, 4)$, तो Ker f ज्ञात कीजिए।
iii) उपरोक्त (i) और (ii) से आप Ker f के बारे में क्या व्यापकीकरण कर सकते हैं? (3)

ग) तुल्याकारिता तक, D_8 के सभी समाकारी प्रतिबिम्ब निर्धारित करने के लिए, समाकारिता के मूल प्रमेय का उपयोग कीजिए। (5)

8. क) यदि U(R) एक वलय R की इकाइयों के समूह को दर्शाता है, तो दिखाइए कि वलयों R_1 और R_2 के लिए, $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$ होता है। (2)

ख) मान लीजिए कि R एक वलय है, I वलय R की एक गुणजावली है, J गुणजावली I की एक गुणजावली है। दर्शाइए कि यदि J का एक तत्समक है, तो J वलय R की एक गुणजावली होगी। साथ ही, यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि यदि J इस प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करती है, तो इसका R की गुणजावली होना आवश्यक नहीं है। (5)

ग) मान लीजिए कि F बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक सभी फलनों का वलय है। मान लीजिए कि S, F में सभी अवकलनीय फलनों का समुच्चय है। जाँच कीजिए कि क्या S

i) F का एक उपवलय है,
ii) F की एक गुणजावली है। (3)

9. क) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की प्रत्येक गुणजावली I, R की किसी वलय समाकारिता की अष्टि होती है। (2)

ख) सिद्ध कीजिए कि दोनों वलय $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ और $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ तुल्याकारी हैं। (3)

ग) मान लीजिए कि R और S वलय हैं तथा $f : R \to S$ एक समाकारिता है। यदि R में x एक वर्गसम है, तो दर्शाइए कि S में f(x) एक वर्गसम होगा। इस तरह, या अन्य विधि से, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक सभी वलय समाकारिताएँ निर्धारित कीजिए। (5)