MTE-02

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

रैखिक बीजगणित

(1st जनवरी, 2021 से 31st दिसम्बर, 2021 तक वैध)

- परिक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।
- किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसके सत्रांत परीक्षा में बैठ नहीं सकते। अगर आप ऐसा करते तो उस पाठ्यक्रम का फरीक्षा फल रोक दिया जायेगा।

केवल बी. एससी. छात्रों के लिए।

- बी. एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों- रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान - में उपलब्ध है। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64) कम से कम दो और अधिकतम चार विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आप को कम से कम 8 क्रेडिट के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप अधिक से अधिक 48 क्रेडिट के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोग्शाला पाटच्तक्रमों के होने चाहिए। उदाहरण के लिये यदि आप इन तीन विषयों मे कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इन्में से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रम के होने चाहिए।

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068
(2021)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी । उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें । जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं । इसके लिए आपको सत्रीय कार्य करना होगा जो इस पुस्तिका में शामिल है ।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें ।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें ।

नामांकन संख्याः.....

नामः.....

पताः.....

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्याः ....

पाठ्यक्रम शीर्षकः ....

अध्ययन केंद्रः ..... **दिनांक**.....

(नाम तथा कोड)

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूफ का सही अनुस्मरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुल्स्कैफ कागज़ का इस्तमाल करें जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बांयें, ऊपर और नीचे 4 सें. मी. की जगह छोड़ें।

4) प्रश्नों का उत्तर लिखते समय स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

5) **अपने आप सत्रीय कर्य को हल कीजिये। अपने साथी चात्रों या इन्टरनेट से नकल न करें। यदि आपको नकल करने क दोषी पाया जाता है, तो आपके सत्रीय कार्य को अयोग्य घोषित कर दिया जाएगा और आपको अगले सत्र के सत्रीय कार्य जमा करना होग।**

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 31st 2021 तक ही वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 31st 2021 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2022 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें ।

6) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है ।

आपके लिए हमारा सुझाव है कि अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: एम. टी. ई.-02
सत्रीय कार्य कोड: एम. टी. ई.-02/टी एम ए /2021
अधिकतम अंक: 100

1) क) $\mathbf{R}$ पर निम्नलिखित में सी कौन से द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) संक्रिया $\bigtriangledown$ जो $x \bigtriangledown y = x\sin y$ द्वारा परिभाषित है।

ii) संक्रिया $\bigtriangleup$ जो $x \bigtriangleup y = e^{x-y}$ द्वारा परिभाषित है।

यह भी जाँच कीजिए कि संक्रियाएँ, जो द्वि-आधारि संक्रियाएँ हैं, वे क्रमविनिमेय और सहचार्य हैं। (5)

ख) बिन्दुओं $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ और $(-1,1,0)$ द्वारा निर्धारित समतल की समीकरण ज्ञात कीजिये। यह भी ज्ञात कीजिए कि यह समतल रेखा $\mathbf{r} = (1+t)\mathbf{i} + (1-2t)\mathbf{j} + (2+t)\mathbf{k}$ को किस बिन्दु पर काटता है। (3)

ग) मान लीजिये कि $\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$,$\mathbf{w} = \frac{-\sqrt{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k})}{6}$. अधिश गुणन्फलें $u \cdot v$, $v \cdot w$ और $u \cdot w$ ज्ञात कीजिये। जाँच कीजिये कि u, v और w प्रसामान्य लाम्बिक है। (2)

2) क) निम्नलिखित में कौन सी $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ है? अपनी उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x+z = 2y\}$

ii) $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x+yz = 0\}$ (5)

वे समुच्चय जो उपसमष्टियाँ है, उनके लिये अधार निकालिये।

ख) जाँच कीजिये कि $B = \{1, 2x+1, (x-1)^2\}$ सदिश समष्टि $\mathbf{P_2}$ के लिये एक आधार है। इस आधार के सापेक्ष $1-x-2x^2$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। (5)

3) मान लीजिये कि $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_3, x_2-x_3, x_1-x_3, 2x_1+x_2-x_3)$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिये कि T एक रैखिक संकारक है या नहिं। T के अष्टि और परिसर ज्ञात कीजिये। अष्टि की विमा ज्ञात कीजिये। (10)

4) क) सदिश समष्टि $\mathbf{P}_2$ के लिये $\{1+x, 1+2x, 1+x+x^2\}$ के द्वैत आधार ज्ञात कीजिये। (3)

ख) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ को

$$T(x,y,z) = (x, x-y, x+2y-z)$$

द्वारा परिभाषित कीजिये। जाँच कीजिये कि T बहुपद $(x-1)(x+1)^2$ को संतुष्ट करता है। (3)

ग) मान लीजिये कि $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ एक रैखिक संकारक है और क्रमित आधार

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

के सापेक्ष T का आव्युह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है। आधार

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

के सापेक्ष T का आव्युह ज्ञात कीजिये। (4)

5) क) निम्नलिखित समीकरण निकाय लीजिये। (6)

$$\begin{aligned} x + 2z + w &= 1 \\ y + z + 2w &= 1 \\ x - 2y - 3w &= 2 \end{aligned}$$

i) समीकरण निकाय को एक आव्यूह समीकरण $AX = B$ के रूप मे लिखिये।

ii) आव्यूह A तथा सम्वार्धित आव्यूह $[AB]$ के जाति ज्ञात कीजिये। इस से निर्धारित कीजिये कि समीकरण निकाय के हल हैं या नहीं।

ख) मान लीजिए कि $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$

$$T(a + bx + cx^2) = b - 2cx + 2(a - b)x^2.$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि T एक रैखिक रूपांतरण है। क्रमित आधार $B_1 = \{x^2, x^2 - x, x^2 - x - 1\}$ र $B_2 = \{1, x, x^2\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह अष्टि ज्ञात कीजिए। T की अष्टि ज्ञात कीजिये। (4)

6) क) जाँच कीजिए की आव्यूह A और B विकर्णनीय है। जो आव्यूह विकर्णनीय है उनका विकर्णन कीजिए। (11)

i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

ख) यदि व्युत्क्रमणीय है तो कैलि-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके भाग क) के आव्यूह B का व्युत्क्रम निकालिये। अथवा अल्पिष्ठ बहुपद निकालिये। (2)

ग) यदि व्युत्क्रमणीय है तो सहखण्डज निकाल कर भाग क) के आव्यूह A का व्युत्क्रम निकालिए। अथवा अल्पिष्ठ बहुपद निकालिये। (3)

7) क) मान लीजिये $\mathbf{P}_3$, कोटि अधिकतम 3 वाले बहुपदों की, आंतर गुणन फल

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

के सापेक्ष, आंतर गुणन फल समष्टि है। ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग करके सदिश

$$\{1 + x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$$

द्वारा जनित $\mathbf{P}_3$ की उपसमष्टि का एक प्रासामान्य लाम्बिक आधार निकालिए। (8)

ख) रैखिक संकारक $T: \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ लीजिए जो

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - iz_2, iz_1 - 2z_2 + iz_3, -iz_2 + z_3)$$

द्वारा परिभाषित है।

i) T^* परिकलित कीजिए और जाँच कीजिए कि T स्वसंलग्न है।

ii) जाँच कीजिए कि T एकिक है। (6)

ग) मान लीजिये (x_1, x_2, x_3) और (y_1, y_2, y_3) आधारों $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$, $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ के सापेक्ष निर्देशांकों को निरुपित करते हैं। यदि $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^3$, तब (y_1, y_2, y_3) के पदों में Q का निरुपण ज्ञात कीजिये। (3)

घ) द्विघाति समघात $-x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz$ के लाम्बिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। उसके मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। (7)

8) निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए।

i) कोई भी व्युत्क्रमणीय आव्युह की पंक्ति समानित सोपनक रूप तत्समक आव्यूह है।

ii) यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमा, शून्येत्तर सदिश समष्टि V कि उप समष्टियाँ है और $\dim(W_1) > \frac{\dim(V)}{2}$, $\dim(W_2) > \frac{\dim(V)}{2}$, तो $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

iii) यदि V एक सदिश समश्ति है और $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, $n \geq 3$ एक ऐसा समुच्चय ह जिस में $v_i \neq v_j$ यदि $i \neq j$ हो तो S एक रैखिकत: स्वतन्त्र समुच्चय है।

iv) यदि $T_1, T_2: V \to V$ एक परिमित विमा सदिश समष्टि V पर रैखिक संकारक हैं और $T_1 \circ T_2$ व्युत्क्रमणीय है तो $T_2 \circ T_1$ भी व्युत्क्रमणीय है।

v) यदि $T_1, T_2: V \to V$ एक परिमित विमा आन्तर गुणन फल सदिश समष्टि V पर स्वसंलग्न रैखिक संकारक हैं तो $T_1 + T_2$ भी स्वसंलग्न है। (10)