MTE-10

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.एससी.)

संख्यात्मक विश्लेषण

1 जनवरी, 2022 से 31 दिसंबर, 2022 तक वैध

सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।
किसी पाठयक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एससी. छात्रों के लिए

- बी.एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 से 64), **कम से कम दो** और **अधिकतम चार** विषयों में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिको, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयागशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 64 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 16 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।

इग्नू
जन–जन का विश्वविद्यालय

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2022

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको यह **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ……………………………..

नाम : ……………………………..

पता : ……………………………..

……………………………..

……………………………..

पाठ्यक्रम संख्या : ……………………………….

पाठ्यक्रम शीर्षक : ……………………………….

सत्रीय कार्य संख्याः ……………………………….

अध्ययन केंद्र : ………………………………. दिनांक : ……………………........

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 cm जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) **यह सत्रीय कार्य दिसम्बर 2022 तक वैध है।** यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे **दिसम्बर, 2022** तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप **जनवरी, 2023** सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE - 10
सत्रीय कार्य कोड : MTE - 10/ TMA/ 2022
अधिकतम अंक : 100

1. क) समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का एक धन मूल, अंतराल]1, 2[में है। नियत बिन्दु पुनरावृत्ति विधि लिखिए और यह दिखाइए कि यह अभिसरित होती है। प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 = 1.5$ से प्रारंभ करके समीकरण का तीन दशमलव स्थान तक की परिशुद्धता का मूल ज्ञात कीजिए। (4)

   ख) i) न्यूटन रैफ्सन विधि

   ii) छेदिका विधि

   से अंतराल [1, 2] में समीकरण $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ का 10^{-5} तक की परिशुद्धता वाला एक उपयुक्त मूल ज्ञात कीजिए। यहां आप इन दो विधियों के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? (6)

2. क) $\sin x$ के लिए मैकलारिन प्रसार को लागू करके त्रुटि परिबंध 10^{-5} तक $\sin \frac{\pi}{4}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। (3)

   ख) ग्राफीय विधि से $xe^x = 1$ के धन वास्तविक मूल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। इस मान का प्रयोग करके नियत बिन्दु पुनरावृत्ति विधि से तीन दशमलव स्थान तक परिशुद्ध $xe^x = 1$ का धन वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए। (4)

   ग) $x_0 = 0$ को एक सन्निकटन मानकर बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ करके $x^3 - 4x + 1 = 0$ के शून्यकों (zeros) में से एक शून्यक का सन्निकटन ज्ञात कीजिए। (3)

3. क) कीलकन के साथ गाउस विलोपन विधि लागू करके निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए।

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5$$

(3)

   ख) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

   का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। (3)

   ग) आंशिक कीलकन द्वारा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय $Ax = b$ का हल ज्ञात कीजिए।

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$

$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6$

गुणकों को संचित कीजिए और कीलकन सदिश भी लिखिए (4)

4. क) $x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ लेकर गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।

$$8x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$
$$-3x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 23$$
$$-x_2 + 10x_3 - x_4 = -13$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 = 13$$

इस निकाय का यथातथ हल $x = [1\ 2\ -1\ 1]^T$ है। अपेक्षित संख्या में पुनरावृत्तियाँ कीजिए जिससे कि दोनों विधियों से समान परिशुद्धता प्राप्त हो। प्राप्त किए गए परिणाम से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? (5)

ख) $x^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$ से प्रारंभ करके घात विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का प्रमुख आइगनमान और संगत आइगनसदिश ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ (5)

5. क) गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल पुनरावृत्ति योजनाओं से समीकरण निकाय $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ का हल प्राप्त किया गया है। आव्यूह रूप में दोनों योजनाएं स्थापित कीजिए। क्या पुनरावृत्ति योजनाएं अभिसारित होती हैं? तर्क के साथ अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

ख) $h = 0.25$ और $h = 0.125$ लेकर संयुक्त सिम्प्सन नियम लागू करके $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। रॉम्बर्ग समाकलन की सहायता से प्राप्त मान में सुधार कीजिए। (4)

ग) समलंबी नियम की सहायता से $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ की परिशुद्धता तक $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ का मान निकालने के लिए आवश्यक अंतरालों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए। (3)

6. क) नीचे दी गई तालिका से उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्होंने 45 से कम अंक प्राप्त किए हैं।

अंक	छात्रों की संख्या
30-40	31
40-50	42
50-60	51
60-70	35
70-80	31

(4)

ख) $f(x) = (1+x)^{1/2}$ का $x_0 = 0$ के प्रति तृतीय घात टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। (3)

ग) भाग (क) में प्राप्त बहुपद की सहायता से $\sqrt{1.1}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए और निहित त्रुटि का एक परिबंध ज्ञात कीजिए। (2)

घ) भाग (क) में प्राप्त बहुपद की सहायता से $\int_0^{0.1} (1+x)^{1/2}\,dx$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। (1)

7. क) $\sin(0.1) = 0.09983$ और $\sin(0.2) = 0.19867$ लेकर लग्राज अंतर्वेशन विधि से $\sin(0.15)$ का एक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। रूंडन त्रुटि पर एक परिबंध प्राप्त कीजिए। (3)

ख) निम्नलिखित आंकड़ों के लिए (3)

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
f(x)	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

स्टर्लिंग सूत्र लागू करके $x_0 = 1.6$ के लिए $f(1.5)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

ग) $h = 0.1$ के लिए $0(h^4)$ की रूंगे-कुट्टा विधि लागू करके आदि मान समस्या

$y' = -y + t + 1, 0 \le t \le 1, y(0) = 1$ को हल कीजिए और $y(0.2)$ का मान प्राप्त कीजिए। यदि यथातथ हल $y(t) = t + e^{-t}$ हो तो $t = 0.2$ पर त्रुटि भी ज्ञात कोजिए। (4)

8. क) विभिन्न समयों x_k पर एक रेखा में गतिमान कण की स्थिति $f(x)$ नीचे की तालिका में दी गई है। $x = 1.2$ पर कण का वेग और त्वरण आकलित कीजिए। (3)

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2.72	3.32	4.06	4.96	6.05	7.39	9.02

ख) $x = 0, x = 1$ और नीचे की तालिका से प्राप्त वक्र से परिबद्ध क्षेत्र को x-अक्ष के प्रति घूर्णन कराने पर एक परिक्रमण घनाकृति प्राप्त होती है। (3)

x	0	0.25	0.5	0.75	1.0
f(x)	1.0	0.9896	0.9587	0.9089	0.8415

इस प्रकार प्राप्त हुई घनाकृति का आयतन

i) समलंबी नियम और ii) सिम्प्सन नियम से ज्ञात कीजिए। (3)

ग) इकाई वृद्धि करके $x = 300$ से $x = 310$ तक आधार 10 पर 10 लघुगणक लीजिए। $\log_{10} x$ का प्रथम अवकलज परिकलित कीजिए जबकि $x = 310$ हो। (4)

9. क) $f(x) = xe^x$ के मानों की निम्नलिखित तालिका से $h = 0.1$ और $h = 0.2$ पर $0(h^2)$ का केन्द्रीय अंतर सूत्र लागू करके $f''(2.0)$ ज्ञात कीजिए। रूंडन त्रुटि और वास्तविक त्रुटि परिकलित कीजिए।

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
f(x)	10.8894	12.7032	14.7781	17.1489	19.8550

(3)

ख) मान लीजिए $f_n, t = t_n$ पर $f(t)$ के मान को निरूपित करता है। यदि $f(t) = t^3$ हो तो $\frac{(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})}{h^2}$ का मान प्राप्त कीजिए। (2)

ग) $h = 0.1$ के लिए $x = 1, y = 0$ से आरंभ करके $x = 1.5$ तक समीकरण $y' = x + y$ का हल कोटि चार की रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा प्राप्त कीजिए। (3)

घ) अंतर समीकरण $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0, k = 0, 1, \ldots$ का हल ज्ञात कीजिए। $y_0 = 1$ और $y_1 = 6$ के लिए विशेष हल भी ज्ञात कीजिए। (2)

10. क) पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3N}{x_n} - \frac{x_n^3}{N}\right], n = 0, 1, 2$$

जहां N एक धन अचर है, एक परिमाण की ओर अभिसरित होती है। यह परिमाण ज्ञात कीजिए। इस विधि की अभिसरण दर भी ज्ञात कीजिए। (4)

ख) फलन $f(x) = (2 + x)^4, 1 \le x \le 2$ के समदूरी मानों की तालिका से एक ऐसा अंतर h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका में द्वितीय घात अंतर्वेशन |त्रुटि| $\le 10^{-6}$ को संतुष्ट करता हो। (3)

ग) घात ≤ 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(x_0) = 1, f'(x_0) = 2, f(x_1) = 2, f'(x_1) = 3$ हो जहां $x_1 - x_0 = h$ (3)