

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.एस.सी.)

वास्तविक विश्लेषण

(1 जनवरी, 2022 से 31 दिसंबर, 2022 तक वैध)

सत्रांत परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एस.सी छात्रों के लिए

- बी.एस.सी कार्यक्रम में एच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों — रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान — में उपलब्ध हैं। एच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 से 64), **कम से कम दो** और **अधिकतम चार** विषयों में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के एच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 64 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 16 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली— 110068

2022

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उन्हें कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2022 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2022 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप 2023 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE-09

सत्रीय कार्य कोड : MTE-09/TMA/2022

अधिकतम अंक : 100

1. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तर के लिए उचित कारण दीजिए। (10)

क) अन्तराल $[1, 4]$ का सीमा-बिन्दु 2 है।

ख) प्रत्येक परिवर्द्ध अनुक्रम अभिसारि है।

ग) $f(x) = |x-1| + |3-x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x=4$ पर अवकलनीय है।

घ) फलन $f(x) = [x] - x$, $[0, 3]$ में समाकलनीय नहीं है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है।

$$\text{ङ) } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \text{जब } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा दिया गया फलन f संवृत्त अन्तराल $[-1, 1]$ में संतता है।

2) क) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sec^2 x - x}{x^3}$ ज्ञात कीजिए। (3)

ख) जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 11x + 9 = 0$ का अन्तराल $[-1, 2]$ में वास्तविक मूल है या नहीं। (3)

ग) ज्ञात कीजिए निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या नहीं : (4)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{7^n}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n}}$

3) क) क्या अनुक्रम $(3 + (-1)^n)$, 2 की ओर अभिसरित होता है ? पुष्टि कीजिए। (2)

ख) दिखाइए कि $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^x = e^{-4}$ (3)

ग) दिखाइए कि अनुक्रम (f_n) $[2, \infty[$ में एकसमानतः अभिसारि है, जहाँ

$$f_n(x) = \frac{3x}{1+nx^2}, x \in [2, \infty[. \quad (5)$$

4. क) आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि $64, 3^{2n+2} - 8n - 9, \forall n \in \mathbb{N}$ का गुणाक है। (3)

ख) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{2}{(2n+2)^2} + \frac{3}{(2n+3)^2} + \dots + \frac{3}{25n} \right]$ ज्ञात कीजिए। (3)

ग) दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{x^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f , $[a, \infty]$ पर एकसमातः संतत है। (4)

5. क) निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{5n-2}$ की जाँच कीजिए। (4)

ख) फलन $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ के स्थानीय उच्चिष्ठ और सत्यापित निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए। (4)

ग) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए : (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{2n+3} \right)^n.$$

6. क) दिखाइए कि $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ के लिए $f(x) = (-1)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) द्वारा $[0, 1]$ पर परिभाषित फलन $f, [0, 1]$ पर समाकलनीय है। (3)

ख) $[0, 1]$ पर $f(x) = 3x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए सत्यापित कीजिए $L(P, f) \leq U(P, f)$ जहाँ विभाजन $P, \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$ है। (4)

ग) उचित पुष्टि सहित सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$. (3)

7. क) दिखाइए कि $R_n(x), \cos 3x$ के मैक्लारिन श्रेणी प्रसार का लंग्राज रूप का अवशेष, शून्य की ओर प्रवृत्त करता है, जब $n \rightarrow \infty$. इस तरह इसका अपरिमित मैक्लारिन प्रसार प्राप्त कीजिए। (5)

ख) $f(x) = |x - 3| + [x], x \in [2, 4]$ द्वारा परिभाषित फलन f का ग्राफ बनाइए, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णक फलन को निरूपित करता है। क्या यह फलन अंतराल $[2, 4]$ में अवकलनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

ग) मान लीजिए कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \in \mathbb{Q} \\ 4, & \text{यदि } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि किसी भी $x \in \mathbb{R}$ पर f संतत नहीं है।

8. क) निम्नलिखित कथनों को सिद्ध या असिद्ध कीजिए: (2)

‘प्रत्येक निरंतर वर्धमान आच्छादी फलन व्युत्क्रमणीय है।’

ख) $f(x) = \frac{[x]}{3x-2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [1,3] \rightarrow \mathbf{R}$ के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है। (4)

ग) दिखाइए कि : $L(P_2, f) \leq U(P_1, f)$,
जहाँ $f(x) = 3x + 2$, $[0,1]$ पर परिभाषित है और
 $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ और $P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ (4)

9. क) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$

से परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न रिमान समाकल ज्ञात कीजिए। क्या f , $[a, b]$ पर रिमान समाकलनीय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (5)

ख) दिखाइए कि फलन $f(x) = x^3$ \mathbf{R} पर एकसमानतः संतत नहीं है। क्या \mathbf{R} के ऐसे उपसमुच्चय का अस्तित्व होता जिस पर f एकसमानतः संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (5)

10. क) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ में एकमानतः अभिसारी है। (3)

ख) दिखाइए कि फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ $f_n(x) = \frac{n}{x+2n}$, $[0, k]$, पर एकसमानतः अभिसारी होता है, जहाँ $k > 0$. (4)

ग) चरम मानों के लिए फलन

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 150$$

की जाँच कीजिए। (3)