

सत्रीय कार्य पुस्तिका**स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)****गणितीय निदर्शन****1 जनवरी, 2016 से 31 दिसंबर, 2016 तक वैध****सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।**

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एससी. छात्रों के लिए

- बी.एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64), **कम से कम दो और अधिकतम चार** विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068

(2016)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको यह **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :
नाम :
पता :

पाठ्यक्रम संख्या :
पाठ्यक्रम शीर्षक :
सत्रीय कार्य संख्या :
अध्ययन केंद्र :
	दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य **दिसम्बर, 2016** तक वैद्य हैं। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे **दिसम्बर, 2016** तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप **जनवरी, 2017** सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति आपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE-14
सत्रीय कार्य कोड : MTE-14/TMA/2016
अधिकतम अंक : 100

1. क) अपने उत्तर की पुष्टि करते हुए निम्नलिखित परिघटनाओं को अंशतत अथवा संतत में वर्गीकृत कीजिए।
 - i) एक ट्यूमर पर विकिरण (radiation) उपचार का प्रभाव जबकि उपचार थोड़े समय के लिए परन्तु नियमित अंतराल पर किया गया हो।
 - ii) एक ट्यूमर पर रसायन औषधित के प्रभाव जबकि इन्हें एक दी हुई अवधि तक रोगी को दिया गया हो। (2)
- ख) वास्तविक जीवन से संबंधित ऐसी दो समस्याएं बताइए जहां आप यह समझते हैं कि गणितीय निदर्शन ही इस समस्या का हल प्राप्त करने का एकमात्र साधन है। आप यह क्यों सोचते हैं कि इन समस्याओं के उपचार के लिए कोई अन्य वैज्ञानिक विकल्प नहीं है? (4)
- ग) ऊँचाई h से गिरायी गई गेंद का निदर्श समीकरण सूचित कीजिए जबकि उस पर लग रहा वायु-प्रतिरोध उसके वेग के वर्ग के समानुपाती हो। किसी भी समय t पर गेंद का वेग ज्ञात कीजिए। सीमांत वेग भी ज्ञात कीजिए जबकि $t \rightarrow \infty$. (4)

2. क) त्रिज्या 0.8 cm वाली एक वर्षा की बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए यदि वह 35000 m. ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है। (2)
- ख) लंबाई l के एक धागे को एक सिरे पर नियत बिंदु से और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m की छड़ी से जोड़ा जाता है। छड़ी एकसमान वेग v पर वृत्ताकार घूम रही है। धागे में बल का समीकरण ज्ञात करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए। (3)
- ग) एक रोगी को नियमित समयांतराल T पर Q mg/ml खुराक की एक औषधि दी जा रही है। प्रयोग करके यह दिखाया गया है कि रक्त में औषधि का सांद्रण C निम्नलिखित नियम का पालन करता है

$$\frac{dC}{dt} = -ke^C$$

- i) यदि औषधि की पहली खुराक $t = 0$ घंटा पर दी गई हो, तो T घंटा बीत जाने के बाद उसका सांद्रण ज्ञात कीजिए।
- ii) यह मानकर कि जब-जब रोगी को औषधि दी जाती है, तब-तब सांद्रण में तात्क्षणिक वृद्धि होती है, दूसरी खुराक देने के बाद और फिर से T घंटा बीत जाने के बाद सांद्रण ज्ञात कीजिए।
- ii) दिखाइए कि T घंटे के अंतराल पर Q mg/ml खुराक में दी गई औषधि के सांद्रण का सीमांत मान R निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है।

$$R = -\ln \frac{kT}{1 - e^{-Q}} \quad (5)$$

3. क) निम्नलिखित को निर्धारणात्मक अथवा प्रसंभाव्य में वर्गीकृत कीजिए। तर्क के साथ अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
 - i) धमनियों में रक्त का प्रवाह
 - ii) एक क्रिकेट मेच में भारतीय टीम का जीतना।

- iii) ग्रहणों का लगना। (3)
- ख) आपूर्ति फलन $S(p) = -p^2 + 10$ और मांग फलन $D(p) = -5p + 16$ वाले एक पूर्णतः स्पर्धी बाजार में संतुलन कीमत p ज्ञात कीजिए। वालरासीय स्थिरता प्रतिबंध का प्रयोग करके यह बताइए कि क्या ये कीमतें स्थायी हैं? (3)
- ग) एक नियत मूल बिन्दु से ध्रुवांतर रेखा (radius vector) के अनुदिश और लांबिक दिशा में एक कण (r, θ) के वेग क्रमशः λr^2 और $\mu\theta$ हैं, जहां, λ और μ अचर हैं। ध्रुवांतर रेखा के अनुदिश और लांबिक दिशा में त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए। (4)
4. क) मोटाई h वाली एक झिल्ली $0 \leq x \leq h$ से ऑक्सीजन का विसरण लीजिए जबकि इसके दो सिरों को क्रमशः सांद्रण C_1 और C_2 पर रखा गया है। यदि प्रारंभिक सांद्रण शून्य हो, तो एक विम विसरण समीकरण की सहायता से इस समस्या का निदर्शन कीजिए और प्रति एकक समय में एकक क्षेत्रफल के लिए वह दर ज्ञात कीजिए जिससे अंतरापृष्ठ $x = 0$ पर विसरित हो रही ऑक्सीजन बाहर निकलती है। (5)
- ख) पृथ्वी के अंदर किसी भी बिन्दु पर प्रति एकक द्रव्यमान गुरुत्व बल $-\frac{GMr}{a^3}$ है, जहां, r पृथ्वी के केन्द्र से कण की दूरी है और G, M, a अचर हैं। केन्द्र से होता हुआ एक सुराख पृथ्वी में ड्रिल करके बनाया गया और उस सुराख में से एक गेंद नीचे डाली गई।
- i) गेंद की गति का वर्णन करने वाला निदर्श समीकरण स्थापित कीजिए और उसका हल प्राप्त कीजिए।
- ii) अपने हल से यह नियमित कीजिए कि क्या गेंद सुराख के दूसरे छोर से बाहर निकल पाएगी या नहीं? (5)
5. क) 50 m की प्रभावी ऊँचाई वाले एक स्टैक से 150 g/s की दर से सल्फर डाई ऑक्साइड उत्सर्जित हो रही है। बदली वाले दिन में स्टैक की ऊँचाई पर पवन की चाल 5 m/s है। स्टैक से i) 400 m. ii) 2000 m की दूरी पर स्थित केन्द्र रेखा के अनुदिश भूमि तल सांद्रण ज्ञात कीजिए। (4)
- ख) त्रिज्या a वाली एक गोल कोशिका अपने आस-पास के क्षेत्र से पोषक पदार्थ ले रही है और इसका चयापचयन (metabolizing) कर रही है। मान लीजिए कि $r = a$ पर $t > 0$ के लिए कोशिका में पोषक पदार्थ का सांद्रण शून्य है और $r < a$ पर प्रारंभिक सांद्रण C_0 है। इस समस्या के निदर्श के संगत निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

समय के किसी भी क्षण पर सांद्रण $C(r, t)$ ज्ञात कीजिए। इसका अपरिवर्ती अवस्था हल भी लिखिए। (6)

6. क) $\frac{dx}{dt} = x(1-x^2)$, $x(0) = x_0$, $-\infty < x_0 < \infty$
द्वारा दिए गए जनसंख्या वृद्धि नियम पर चर्चा कीजिए। (4)
- ख) यह मानकर कि पवन का वेग u केवल एक दिशा में है सांद्रण $C(x, t)$ के प्रदूषकों के परिक्षेपण को निर्धारित करने वाला समीकरण निम्नलिखित है:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h, \quad t > 0$$

जहाँ D प्रदूषकों का विसरण गुणांक है। सांद्रण बंटन $C(x, t)$ ज्ञात कीजिए जहाँ
 $C(x, 0) = 0, C(0, t) = c_1, C(h, t) = c_2, c_1$ और c_2 अचर है। (6)

7. क) उस स्थिति में वर्तमान घनत्व ज्ञात कीजिए जबकि ऑक्सीजन 2.2×10^{-8} मोटाई वाली रक्त कोशिका के माध्यम से, जिसके दोनों सिरों का तापमान एक नियत सांद्रण C_0 पर बनाए रखा गया है, विसरित होती है। (2)
- ख) वृत्ताकार अनुप्रस्थ-परिच्छेद वाली एक दृढ़ नली में प्रवाहित हो रहा तरल लीजिए जिस पर पोईज़लो नियम लागू होता है। नली की लंबाई 3 cm है, त्रिज्या 8×10^{-3} cm है और दाब-हास $P, 6 \times 10^3$ dynes/cm² है। एक प्रयोगशाला में प्रयोग करने पर यह पाया गया है कि प्रवाह का अधिकतम वेग 1.185 cm/sec है तब i) तरल की श्यानता ii) प्रवाह-दर ज्ञात कीजिए। (3)
- ग) मान लीजिए एक कोशिका प्रति मिनट विभाजित होती रहती है। यह मानकर कि कोई भी कोशिका मरती नहीं है, यह बताइए कि कोशिकाओं की संख्या दस लाख से अधिक होने में कितने मिनट का समय लगेगा? (2)
- घ) एक जाति के जानवरों में समष्टि का एक अचर अंश $\alpha = 5.3$ प्रत्येक प्रजनन ऋतु में पैदा होता है और एक अचर अंश $\beta = 4.97$ मर जाता है। समष्टि का एक अंतर समीकरण सूत्रित कीजिए और दो ऋतुओं के बाद व्यष्टियों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि यह दिया हुआ है कि प्रारंभ में संख्या $N_0 = 987$ है। (3)
8. क) एक उद्यमी का अल्पकालिक लागत फलन $q^3 - 7q^2 + 16q + 90$ है। वह कीमत ज्ञात कीजिए जिस पर उद्यमी आदर्श बाजार में अपना उत्पादन रोक देता है। आपूर्ति फलन भी व्युत्पन्न कीजिए। (3)
- ख) प्रमुखता की सहायता से योग शून्य द्वि-व्यक्ति खेल हल कीजिए।

खिलाड़ी B

	I	II	III	IV	V
खिलाड़ी A	3	5	4	10	6
	5	6	3	7	9
	8	7	9	9	8
	4	2	8	5	3

दोनों खिलाड़ियों A और B की इष्टतम युक्तियां और खेल के मान ज्ञात कीजिए। (3)

- ग) मान लीजिए पिछला पूर्वानुमान 2083 था और पिछली अवधि में विशेष चर का वास्तविक मान 1975 था और इसका सबसे पुराना मान 1945 था। हाल ही में किए गए चार प्रेक्षणों पर आधारित गतिमान औसत तकनीक को लागू करके अगली अवधि के लिए किया गया नया पूर्वानुमान ज्ञात कीजिए। (4)
9. क) निम्नलिखित गोम्पर्टस समीकरण हल कीजिए

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln\left(\frac{K}{N}\right), N(0) = N_0$$

- i) आंकड़ा $r = 0.71$ प्रति वर्ष, $K = 80.5 \times 10^6$ kg., $\frac{N_0}{K} = 0.25$, के लिए एक निदर्श की सहायता से $N(2)$ का प्रायुक्त मान (predicted value) ज्ञात कीजिए।
- ii) इन्हीं आंकड़ों के लिए निदर्श की सहायता से वह समय t ज्ञात कीजिए जिस पर

$$N(\tau) = 0.75K \quad (4)$$

ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x + 2x^3$$

- i) क्या यह निकाय स्वायत्त है? अपना तर्क दीजिए।
- ii) निकाय के क्रांतिक बिन्दुओं की प्रकृति ज्ञात कीजिए।
- iii) संगत रैखिक निकास की संछेदी (trajectory) आलेखित कीजिए। दिखाइए कि संछेदी जिस पर $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ होने पर $t \rightarrow \infty$ होता है वह केवल $y = -x$ है और वह संछेदी जिसके लिए $t \rightarrow \infty$ होने पर $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty, y = x$ है।
- iv) अरैखिक निकाय की संछेदी ज्ञात कीजिए। (6)

10. क) मछली-संख्या की वृद्धि निम्नलिखित अवकल समीकरण से नियंत्रित होती है।

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h$$

जहां $x(t)$ किसी भी समय t पर मछली-संख्या के घनत्व को निरूपित करता है, $F(x)$ इसकी प्राकृतिक वृद्धि-दर है (इसका उच्चिष्ठ एक मध्यवर्ती बिंदु पर है) और h वह अचर दर है जिस पर मछली-संख्या का निष्कासन किया जाता है। ग्राफीय रूप से यह दिखाइए कि जब $h < \max F(x)$ तब समीकरण के दो साम्यावस्थाएं होती हैं। इनके स्थायित्व पर चर्चा कीजिए। इन साम्यवस्थाओं को ज्ञात कीजिए जबकि $F(x)$ एक वृद्धिघात फलन हो। स्थितियों $h = \max F(x)$ और $h > \max F(x)$ में क्या होता है, इसकी व्याख्या कीजिए। (5)

ख) मान लीजिए तीन प्रतिभूतियों के प्रतिफल $\bar{r}_1 = 9\%$, $\bar{r}_2 = 8\%$ और $\bar{r}_3 = 11\%$ हैं। और मान लीजिए $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 6$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 10$ और $\sigma_{23} = -2$ हैं। प्रत्याशित प्रतिफल \bar{r}_p और निवेश-सूची P का प्रसरण σ_p^2 ज्ञात कीजिए जबकि:

- i) $P = (0.3, 0.2, 0.5)$ और
- ii) $P = (0.3, 0.6, 0.1)$. (5)