

सत्रीय कार्य पुस्तिका  
स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)

वास्तविक विश्लेषण

1 जनवरी, 2016 से 31 दिसंबर, 2016 तक वैध

**सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।**

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

**केवल बी.एससी. छात्रों के लिए**

- बी.एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64), **कम से कम दो और अधिकतम चार** विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ  
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय  
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068  
(2016)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 25% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

### सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

---

नामांकन संख्या :	.....
नाम :	.....
पता :	.....
	.....
पाठ्यक्रम संख्या :	.....
पाठ्यक्रम शीर्षक :	.....
सत्रीय कार्य संख्या :	.....
अध्ययन केंद्र :	.....
	दिनांक : .....

---

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य **दिसम्बर, 2016** तक वैध हैं। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे **दिसम्बर, 2016** तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप **2017** सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

## सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: MTE-09  
सत्रीय कार्य कोड: MTE-09/TMA/2016  
अधिकतम अंक: 100

1. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं और कौन-कौन से असत्य हैं। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (10)

क) एकल समुच्चय  $\{x\}$  प्रत्येक  $x \in \mathbf{R}$  के लिए विवृत्त समुच्चय है।

ख) श्रेणी  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  एक अभिसारी श्रेणी है।

ग)  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^x, & \text{जहां } x \neq 0 \\ 1, & \text{जहां } x = 0 \end{cases}$

द्वारा दिया गया फलन  $f$ ,  $[0, 1]$  पर संतत है।

घ)  $f(x) = |x - \sqrt{2}| \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का  $x = \sqrt{2}$  पर क्रांतिक बिन्दु होता है।

ड.) यदि किसी फलन के लिए असांतत्य- बिन्दु परिमित संख्या में हैं, तो वह फलन समाकलनीय नहीं होगी।

2. क) सिद्ध कीजिए कि  $a_n = \frac{2^2}{n^2 + 3^2}$  द्वारा परिभाषित अनुक्रम  $\{a_n\}$ , 0 की ओर अभिसरित होता है। (3)

ख) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व हो :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x^3}{1 - \cos x^3} \quad (2)$$

ग) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए : (5)

i)  $\frac{1.2}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{3.4}{5^2 \cdot 6^2} + \frac{5.6}{7^2 \cdot 8^2} + \dots$

ii)  $\sum \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n}$

3. क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $\mathbf{R}$  के क्रम पूर्णता गुणधर्म का विवरण दीजिए। इसका प्रयोग करते हुए दिखाइए कि  $\mathbf{R}$  में  $S = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$  का उच्चक तथा निम्नक होता है। (3)

ख) मान लीजिए  $f$  निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन है :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{यदि } x \in ]\infty, 1[ \\ \frac{3x^2 - 2}{x}, & \text{यदि } x \in [1, 2[ \\ (1 + 2x)^2, & \text{यदि } x \in [2, \infty[ \end{cases}$$

$]-\infty, \infty[$  पर  $f$  के सांतत्य की चर्चा कीजिए। (4)

- ग) जांच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत्त हैं या विवृत्त या दोनों में कोई नहीं : (3)
- i)  $]1, 5[ \cup ]3, 6[$
- ii)  $[0, 1] \cup \left\{ \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{10}{7} \right\}$
- iii)  $\{5n : n \in \mathbf{N}\}$
4. क) आगमन सिद्धांत द्वारा सिद्ध कीजिए कि  $7, 3^{2n-1} + 2^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$ , का गुणखंड है। (4)
- ख) दिखाइए कि समीकरण  $x^3 - 2x^2 + 5x - 12 = 0$  का एक ऐसा मूल होती है, जो धनात्मक वास्तविक संख्या हो। (4)
- ग) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $\left\{ \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \dots \right\}$  गणनीय है। (2)
5. क) दर्शाइए कि  $\left( \frac{1}{x} \right)^x$  का स्थानीय उच्चिष्ठ मान  $e^{1/e}$  है। (4)
- ख) कौशी मध्य मान प्रमेय नीचे दिए गए फलनों के लिए सत्यापित कीजिए :  

$$f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, 4].$$
 (3)
- ग) दिखाइए कि  $1 + x \leq e^x, \forall x \in [0, \infty[$ . क्या  $x < 0$  के लिए यह असमिका लागू होती है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)
6. क) यह दिखाते हुए कि  $n$ -पदों के बाद अवशेष शून्य की ओर प्रवृत्त होता है,  $\sin 2x$  का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। (5)
- ख) अंतराल  $[0, 1]$  में फलन  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$  का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। (5)
7. क) अंतराल  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  में फलन  $f(x) = 2 \cos x$  लीजिए। दिखाइए कि  $L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$  और  $U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$  जहां  $P_1 = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\}$  और  $P_2 = \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\}$  है। (6)
- ख) दिखाइए कि  $x = 0$  पर निम्नलिखित फलन  $f$  का अवकलज  $f'$  का अस्तित्व होता है  

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$
लेकिन  $x = 0$  पर  $f'$  संतत नहीं होता है। (4)
8. क) जांच कीजिए कि निम्नलिखित फलन के लिए अंतराल  $[2, 5]$  का माध्यमान है।  

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{यदि } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$
क्या यह माध्यमान प्रमेय का विरोध करता है? सत्यापित कीजिए। (3)

ख) योगफल

$$\frac{n}{3n^2+1^2} + \frac{n}{3n^2+2^2} + \frac{n}{3n^2+3^2} + \cdots + \frac{1}{4n}.$$

की सीमा ज्ञात कीजिए, जबकि  $n \rightarrow \infty$  हो। (4)

ग) वायस्ट्रास  $M$  - परीक्षण को लागू करके दिखाइए कि सभी  $x \in \mathbf{R}$  के लिए

$$\sum \frac{10}{n^4 + x^4} \text{ एकसमान अभिसरित होती है।} \quad (3)$$

9. क) रीमान समाकलन का प्रयोग करते हुए दिखाइए कि  $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$ . (5)

ख) दिखाइए कि फलन  $f(x) = \frac{1}{x}$  ]0, 1] पर संतत है लेकिन एक समान संतत नहीं है। (5)

10. क) निम्नलिखित का एक-एक उदाहरण दीजिए।

i) एक परिबद्ध, समुच्चय जिसका कोई सीमा बिंदु नहीं है।

ii) एक परिबद्ध समुच्चय जिसके अनंत सीमा बिंदु हैं।

iii) एक अनंत समुच्चय जो एक अंतराल नहीं है। (6)

ख) सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -4, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f$  प्रत्येक वास्तविक संख्या पर असंतत है। (4)