

सत्रीय कार्य पुस्तिका  
स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)

उच्चस्तरीय कलन

1 जनवरी, 2016 से 31 दिसंबर, 2016 तक वैध

सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एससी. छात्रों के लिए

- बी.एससी. कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64), कम से कम दो और अधिकतम चार विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको कम से कम 8 क्रेडिट के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप अधिक से अधिक 48 क्रेडिट के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ  
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय  
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068  
(2016)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 25% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

### सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

---

नामांकन संख्या	:	.....	
नाम	:	.....	
पता	:	.....	
		.....	
पाठ्यक्रम संख्या	:	.....	
पाठ्यक्रम शीर्षक	:	.....	
सत्रीय कार्य संख्या	:	.....	
अध्ययन केंद्र	:	.....	
	दिनांक	:	.....

---

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य **दिसम्बर, 2016** तक वैध हैं। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे **दिसम्बर, 2016** तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप **2017** सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

## सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: MTE-07  
सत्रीय कार्य कोड: MTE-07/TMA/2016  
अधिकतम अंक: 100

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (10)

क)  $x \rightarrow 1$  होने पर  $(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$ ,  $1^\infty$  प्रकार का होगा।

ख)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$  का अस्तित्व नहीं होगा।

ग) यदि  $z = e^{xy^2}$ ,  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ , तब  $t = 0$  पर,  $\frac{dz}{dt} = \frac{-\pi^2}{8}$  होगा।

घ) परवल्यों  $y^2 = 4x$  और  $x^2 = 4y$  के बीच का प्रदेश केवल टाइप-1 का होता है।

ड.)  $u = 2x + y$ ,  $v = 3x - y$  के  $(10, -6)$  पर जैकोबियन 5 होगा।

2. क) निम्नलिखित सीमांक ज्ञात कीजिए : (3)

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

ख) मान लीजिए  $x = e_1 + 2e_2 - 5e_3$ ,  $y = 2e_1 + 4e_2 + 9e_3$  जहाँ  $e_1, e_2, e_3$  मात्रक सदिश हैं।  $|x|$  और  $|y|$  ज्ञात कीजिए। (2)

ग) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन की सीमा का अस्तित्व मूल-बिन्दु  $(0, 0)$  पर होता है लेकिन वहाँ पुनरावृत्ति सीमाओं का अस्तित्व नहीं होता :

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases} \quad (5)$$

3. क) टेलर प्रमेय का प्रयोग करके,  $(x-1)$  और  $(y+2)$  की घातों में  $x^2 + 3y - 2$  का विस्तार कीजिए। (5)

ख) प्रतिलोम फलन प्रमेय लागू करके बताइए कि फलन  $F(x, y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$ ,  $(1, 2)$  पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है या नहीं। (3)

ग)  $f(x, y) = x^5 + 10x^3y^3 + 8y^4$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए बिन्दु  $(x, y)$  पर  $f_{xy}$  का मूल्यांकन कीजिए। श्वार्ज प्रमेय द्वारा बिन्दु  $(x, y)$  पर  $f_{yx}$  प्राप्त कीजिए। (2)

4. क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन फलनिकतः आश्रित हैं या नहीं : (3)

$$f(x, y) = e^y \sin^2 x$$

$$g(x, y) = y + 2 \ln \sin x$$

जबकि  $y \in \mathbf{R}$  और  $0 < x < \pi$ .

ख) वे दिशाएँ ज्ञात कीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{5x^2 + 5y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के  $(0, 0)$  पर दिक्क अवकलज होते हैं। (4)

ग) मान लीजिए कि  $S$  और  $T$ ,  $\mathbf{R}^3$  में उपसमुच्चय है।  $S$ , मूल बिन्दु पर केन्द्र वाला एकक विवृत गोलक है तथा  $T$  निम्नलिखित विवृत घन है।

$$T = \{(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$$

निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

- $S \subset T$
  - $T \subset S$
  - इनमें से कोई नहीं है।
- (3)

5. क) निम्नलिखित के स्तब्ध बिन्दु निर्धारित करके उनका वर्गीकरण कीजिए।

- $f(x, y) = 4xy + x^4 - y^4$ .
  - $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .
- (6)

ख) निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र ज्ञात कीजिए। (2)

- $\sqrt{x^2 + y^2}$ .
- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .
- $2x - 2y$ .
- $\frac{y}{x}$ .

ग) क्या हम लापिताल नियम द्वारा सीमा  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2x + \pi}{1 - \sin x}$  का मूल्यांकन कर सकते हैं? कारण बताइए। (2)

6. क) दिए गए बिन्दु पर, निम्नलिखित फलनों के संतत्यता की जाँच कीजिए।

$$i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, (0, 0) \text{ पर}$$

$$ii) f(x, y, z) = \frac{x^2 + 3xyz - 5z}{x^3y + 2z^2 - 3xy + 9}, (0, 0, 0) \text{ पर}$$

क्या ये उन बिन्दुओं पर अवकलनीय है? अपने उत्तर का कारण बताइए। (6)

ख) यदि  $u = \cos\left(\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ , तो दिखाइए कि  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ . (4)

7. क) आयत  $R: [0, 1] \times [0, 1]$  पर  $\iint_R f(x, y) dx dy$  का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases} \quad (6)$$

ख) लगरांज मल्टिप्लयर विधि से ऐसे ऋणात्मक संख्या का युग्म निकालिए जिसका योग 70 और गुणन अधिकतम हो। (4)

8. क) निम्नलिखित को बेलनीय निर्देशांकों पर परिवर्तित करके परिकलित कीजिए।  

$$\iiint_W \frac{z}{1+x^2+y^2} dx dy dz, \text{ जहाँ}$$

$$W = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, 1 \leq z \leq 4\}. \quad (5)$$
- ख) दिखाइए कि  $\int_{(3, \frac{3}{2})}^{(4, \frac{1}{2})} 2x \sin \pi y dx + \pi x^2 \cos \pi y dy$  पथ स्वतंत्र है और परिकलित भी कीजिए। (5)
9. क) प्रथम अष्टांशक (octant) में स्थित उस घनाकृति का द्रव्यमान मालूम कीजिए जो ऊपर की ओर से पृष्ठ  $z = 4 - y^2$  से और दायीं ओर से  $x^2 = y$  से परिबद्ध हो। यहाँ घनत्व फलन  $\delta(x, y, z) = xy$  है। (6)
- ख) बल  $F = (x^2, -xy)$  द्वारा चौथाई वृत्त  $C = \left\{ \cos t, \sin t \mid 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  के अनुदिश एक कण को ले जाने में किया गया कार्य मालूम कीजिए। (4)
10. क) प्रथम चतुर्थांश में स्थित और वक्रों  $y = x^2$  और  $y = x$  से परिबद्ध एक पतला प्लेट का गुरुत्व केन्द्र मालूम कीजिए। जिसका घनत्व एकसमान है। (4)
- ख) परावलीय बेलन  $x = y^2$  और समतलों  $x = z, y = 0$  और  $y = 1$  द्वारा परिबद्ध और घनत्व अचर  $k$  वाला एक ठोस वस्तु का आघूर्ण  $M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$  मालूम कीजिए। (6)