MTE-14

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम)

गणितीय निदर्शन

1 जनवरी, 2014 से 31 दिसंबर, 2014 तक वैध

सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

केवल बी.एससी छात्रों के लिए

- बी.एससी कार्यक्रम में ऐच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 या 64), **कम से कम दो** और **अधिकतम चार** विषयों, में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के ऐच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 24 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 6 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।

इग्नू जन-जन का विश्वविद्यालय

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली –110 068

(2014)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ....

नाम : ....

पता : ....

....

पाठ्यक्रम संख्या : ....

पाठ्यक्रम शीर्षक : ....

सत्रीय कार्य संख्या : ....

अध्ययन केंद्र : .... दिनांक : ....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक काग़ज़ पर बॉयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2014 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2014 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2015 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) **परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।**

8) **अपनी उत्तर पुस्तिका की फ़ोटोकॉपी ज़रूर रखिए।**

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड :एम. टी. ई-14
सत्रीय कार्य कोड :एम. टी. ई -14/टी. एम. ए. /2014
अधिकतम अंक : 100

1. क) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करके यह दिखाइए कि ग्रह केप्लर के तृतीय नियम का पालन करते है। (3)

   ख) पृथ्वी की सतह से काफी ऊंचाई पर छाए बादल से वर्षा की एक बूंद गिरना प्रारंभ करती है। गिरने के दौरान वायु-प्रतिरोध के कारण बूंद मंद पड़ती जाती है। यह प्रतिरोध बूंद की तात्क्षणिक चाल $v(t)$ के अनुक्रमानुपाती हो, तो

   i) निदर्श समीकरण लिखिए।
   ii) क्या यह निदर्श स्थैतिक है या गतिक? क्यों?
   iii) चाल $v(t)$ का एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।.
   iv) समय t में परविर्तन के साथ $v(t)$ के व्यवहार पर चर्चा कीजिए। (3)

   ग) ऊंचाई h वाली एक मीनार से एक पत्थर ऊर्ध्वाधरतः नीचे गिराया गया है। उसी समय एक अन्य पत्थर को मीनार के आधार से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर वेग u से फेंका गया है। वेग u का निम्नतम मान क्या होगा जिससे कि दोनों पत्थर मध्य वायु में एक-दूसरे से मिलें? (4)

2. क) एक विम स्लैब ($0 < x < 1$) में ऊष्मा चालन की समस्या लीजिए। $x = 0$ पर पृष्ट ऊष्मारोधी है और $x = 1$ पर पृष्ठ और परिवेश के बीच के तापांतर की आनुपतिक दर से ऊष्मा की हानि पर्यावरण में हो रही है। इस समस्या के सूत्रण से परिसीमा प्रतिबंधों सहित निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता हैः

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   $$u(x, 0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

   $$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + u(1, 0) = 0$$

   जहां $u(x, t)$ तापमान है।

   चर-पृथक्करण विधि से हल $u(x, t) = T(t)\,X(x)$ प्राप्त कीजिए और निम्नलिखित ज्ञात कीजिएः

   i) $T(t), X(x)$ के समीकरण और इन समीकरणों को हल करने के लिए $X(x)$ पर संगम प्रतिबंध।

   ii) ऊपर (i) में $X(x)$ के लिए प्राप्त समस्या के आइगनमान और संगत आइगनफलन।

   iii) हल $u(x, t)$. (6)

   ख) एक कप कॉफी जिसका तापमान $90^\circ C$ है, को एक कमरे में, जिसका तापमान $25^\circ C$ है, रखा गया है। दो मिनट बाद कॉफी का तापमान $75^\circ C$ हो जाता है। बताइए कि कॉफी का तापमान $50^\circ C$ कब होगा? (4)

3. क) एक रोगी को एक दवा की $Q\ mg/ml$ खुराक एक नियत समय-अंतराल t पर दी जाती है। प्रयोग से यह दिखाया गया है कि रक्त में दवा का सांद्रण C निम्नलिखित नियम का पालन करता है

   $$\frac{dC}{dt} = -k\ e^{C}$$

i) यदि दवा की पहली खुराक समय $t=0$ घंटे पर दी गई हो, तो बताइए कि T घंटा बीत जाने के बाद सांद्रण क्या होगा?

ii) यह मानकर कि जब भी दवा दी जाती है तो सांद्रण में तात्क्षणिक वृद्धि हो जाती है बताइए कि दूसरी खुराक देने और फिर से T घंटा बीत जाने के बाद सांद्रण क्या होगा?

iii) दिखाइए कि T घंटे के अंतराल पर दी गई $Q\,mg/ml$ खुराक के सांद्रण का सीमांत मान R निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है :

$$R = -\ln \frac{kT}{1-e^{-Q}}$$ (6)

ख) निम्नलिखित मांग और आपूर्ति फलनों के स्थैतिक स्थायित्व और गतिक स्थायित्व पर चर्चा कीजिए, जहां हम यह मान लेते हैं कि $k=3$.

$$D_t = -0.2\,p_t + 80$$
$$S_t = 0.3\,p_t + 40$$ (4)

4. क) त्रिज्या a वाली एक गोल कोशिका अपने परिवेश से एक पोषक लेती है और इसका उपापचयन (metabolize) करती है। यह मान लीजिए कि $t>0$ के लिए $r=a$ पर कोषिका में पोषक का सांद्रण शून्य है और $r<a$ के लिए प्रारंभिक सांद्रण C_0 है। इस समस्या के निदर्श के संगत निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

किसी भी क्षण पर सांद्रण $C(r,t)$ ज्ञात कीजिए और अपरिवर्ती अवस्था हल भी लिखिए। (6)

ख) प्रारंभ में एक झील में 100 मछलियां और उनके शिकार के लिए 1000 प्राणिप्लवक रखे गए। प्राणिप्लवकों के लिए पर्याप्त मात्रा में आहार उपलब्ध है। क्योंकि मछलियां प्राणिप्लवकों का शिकार करती हैं इसलिए मछलियों की संख्या में स्पीशीज़ के बीच के समागमों की संख्या की आनुपातिक दर से वृद्धि होगी। मछलियों की संख्या की आनुपातिक दर से मछलियां मरती भी जाएगीं। किसी भी समय मछलियों की वर्तमान संख्या के $\frac{1}{5}$ की दर से मछली पकड़ने की अनुमति भी प्राप्त है। अपनी संख्या की आनुपातिक दर से प्राणिप्लवकों की संख्या में वृद्धि होती है और दोनों स्पीशीज़ के बीच के समागमों की संख्या की आनुपातिक दर से वे मरते जाते हैं। इस स्थिति का निदर्शन कीजिए। (4)

5. क) मान लीजिए एक दी हुई जनसंख्या को भागों में बांटा जा सकता है। एक भाग वह है जिन्हें रोग हैं और अन्य को संक्रमित कर सकते हैं और दूसरा भाग वह जिन्हें रोग तो नहीं है, परन्तु वे रोग के प्रति सुग्राही होते हैं। मान लीजिए x सुग्राहय व्यक्तियों का अनुपात है और y संक्रामी व्यक्तियों का अनुपात है, और $x+y=1$. मान लीजिए जनसंख्या में रोगी और स्वथ्य व्यक्तियों के बीच संपर्क होने के कारण रोग फैलता है और रोग फैलने की दर ऐसे संपर्कों की संख्या के आनुपातिक है। यदि y_0 संक्रामक व्यक्तियों का प्रारंभिक अनुपात हो, तो

i) दी हुई समस्या का एक गणितीय निदर्श सूत्रित कीजिए और इसे नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण लिखिए।

ii) ऊपर (i) में प्राप्त समीकरण के संतुलन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

iii) दी हुई समस्या को हल कीजिए। $t \to \infty$ होने पर रोग के प्रसार के संबंध में क्या होता है? (6)

ख) एक कंपनी 12 मद प्रतिदिन की दर से मद बनाती है (चरघातांकी बंटन के अनुसार)। सेवा काल बंटन भी चरघातांकी है जिसका औसत 60 मिनट है।

i) उपयोग-गुणक परिकलित कीजिए।

ii) पंक्ति में औसत मदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

iii) पंक्ति का आमाप 5 से बड़ा या 5 के बराबर होने की प्रायिकता क्या होगी? (4)

6. क) नीचे की सारणी में दो प्रतिभूतियों के प्रतिफल बंटन दिए गए हैं :

घटना	संयोग $p_{1j} = p_{2j}$	प्रतिफल R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	0.25	11	9

प्रतिभूतियों का सह-संबंध गुणांक ρ_{12} ज्ञात कीजिए। ρ_{12} के इस मान से प्रतिभूतियों की निवेश सूचियों के समुच्चय को निरूपित करने वाले वक्र के आकार के बारे में क्या पता चलता है? (6)

ख) निम्नलिखित संवृद्धि निदर्श के संगत संवृद्धि दर का ज्यामितीय रूप में निर्वचन कीजिए

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left(\frac{x}{k_0} - 1\right)\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad 0 < k_0 < k$$

$$x(0) = x_0,$$

जहां r_1, k, k_0 अचर हैं, k जनसंख्या $x(t)$ की पालन क्षमता है। अतः ज्ञात कीजिए कि कब संवृद्धि अधिकतम होगी। (4)

7. क) निम्नलिखित त्रिघात लागत फलन लीजिए

$$C = 0.004q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5.$$

यहां यह मान लीजिए कि q की कीमत प्रति इकाई 13 है। वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता है। (5)

ख) दो खिलाड़ियों की भुगतान सारणी नीचे दी गई है

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A		B_1	B_2	B_3
	A_1	1	7	2
	A_2	6	2	7
	A_3	5	2	6

प्रमुखता लागू करके खेल का मान और प्रत्येक खिलाड़ी की इष्टतम मिश्रित युक्ति ज्ञात कीजिए। (5)

8. क) मान लीजिए पिछला पूर्वानुमान 2083 था और पिछली अवधि में इंटरेस्ट-चर का वास्तविक मान 1975 था और इंटरेस्ट का सबसे पुराना मान 1945 था। हाल ही के चार प्रेक्षणों पर आधारित गतिमान औसत तकनीक को लागू करके अगली अवधि का नया पूर्वानुमान ज्ञात कीजिए। (4)

ख) मान लीजिए एक उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = q_1\sqrt{q_2}$ है। मान लीजिए $p_1 =$ रु. 250/-, $p_2 =$ रु. 400/- और इस अवधि में उपभोक्ता की आय रु. 15000/- है। उपभोक्ता के लिए आवश्यक वे मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि इस संचय द्वारा उपभोग करने पर उसका उपयोगिता फलन अधिकतम हो जाए। (3)

ग) एक विशेष वस्तु उत्पादित करने वाली N अभिन्न फर्म हैं। प्रत्येक फर्म का q एकक उत्पन्न करने का लागत फलन $q^3 + 2q^2 + 4q + 6$ एकक धन है। प्रत्येक फर्म का आपूर्ति फलन ज्ञात कीजिए। मांग फलन

$D(p) = N\left(\frac{22}{3} - p\right)$ है। संतुलन मूल्य भी ज्ञात कीजिए। (3)

9. क) 1993 से 1998 तक के बीच एक कंपनी द्वारा की गई बिक्रियां नीचे दी गई हैं

वर्ष	1993	1994	1995	1996	1997	1998
बिक्री (लाखों रूपयों में)	40	45	50	55	60	65

न्यूनतम वर्ग विधि से एक रैखिक वक्र आसंजित कीजिए। और, इस तरह कंपनी द्वारा 1999 में की गई बिक्री ज्ञात कीजिए। (4)

ख) मान लीजिए $P = (w_1, w_2)$ दो प्रतिभूतियों की एक निवेष-सूची है। निम्नलिखित स्थितियों में w_1 और w_2 के मान ज्ञात कीजिए।

i) $\rho_{12} = -1$ और P जोखिम मुक्त हो।

ii) $\sigma_1 = \sigma_2$ और P पर प्रसरण न्यूनतम हो।

iii) P पर प्रसरण न्यूनतम हो और $\rho_{12} = -0.5, \sigma_1 = 2$ और $\sigma_2 = 3$. (6)

10. क) एक टेलीविजन मिस्त्री, जो एक टेलीविजन की मरम्मत में औसतन $1\frac{1}{2}$ घंटे लेता है, के पास प्रतिदिन 4 टेलीविज़न की औसत दर से टेलीविजन मरम्मत के लिए यदृच्छया आते हैं। यहां यह मान लिया गया है कि मरम्मत में लगने वाला समय चरघातांकीय बंटित है। वर्कशॉप में टेलीविजन की औसत संख्या क्या है? इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि मरम्मत के लिए आने वाले टेलीविजन के पहले कम से कम तीन टेलीविज़न रखे होगें? मिस्त्री प्रति दिन आठ घंटा काम करता है। (3)

ख) कारण सहित उत्तर देते हुए बताइए कि निम्नलिखित समस्याओं के लिए आप किस प्रकार के निदर्शन का प्रयोग करेंगे। इन समस्याओं के चार अनिवार्य तथ्य भी बताइए।

i) एक बीमा कंपनी की आर्थिक व्यवहार्यता (viability) जोखिमों का निर्धारण करने और जोखिम को संरक्षित रखने के लिए, लिए गए प्रीमियम संबंधी निर्णय पर मुख्यतः निर्भर करती है। यदि प्रीमियम कम हो, तो खर्चा वसूल की गयी धनराशि से अधिक हो सकता है और ऐसी स्थिति में कंपनी दिवालिया हो सकती है। इसके विपरीत यदि प्रीमियम अधिक हो तो ग्राहकों की संख्या में कमी आती जाएगी जो कि कंपनी के लाभ को प्रभावित करेगी। विभिन्न जोखिमों के लिए प्रीमियम संबंधी निर्णय लेने में बीमा कंपनी की सहायता करना जिससे कि आर्थिक व्यवहार्यता सुनिश्चित बनी रहे और लाभ अधिकतम होता रहे।

ii) एक नदी के किनारों पर स्थित कंपनियां, जो रासायनिक पदार्थों का उत्पादन करती हैं, अपने अपशेष पदार्थों को लगातार नदी में फेंक कर निपटाती हैं जिसके कारण नदी अत्यधिक प्रदूषित होती जाती है। ऐसी स्थिति में स्थानीय अधिकारियों ने इस संबंध में नया कानून लागू किया है कि यदि नदी प्रदूषण एक निश्चित सांद्रण सीमा से अधिक हो जाता है तो ऐसा करने वाली कंपनियों को जुर्माने के रूप में भारी धनराशि का भुगतान करना होगा। अपशेष को निपटाने के संबंध में एक ऐसी नीति मालूम करना जिससे कि यह सुनिश्चित किया जा सके कि प्रदूषण का स्तर कभी भी नियत की गई सीमाओं से अधिक न हो पाए। (7)