

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
विविक्त गणित
(1 जुलाई, 2012 से 31 मार्च, 2013 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068
(जुलाई, 2012 सत्र के लिए)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको सत्रीय कार्य करना होगा जो इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या:.....

नाम:.....

पता:.....

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या:

पाठ्यक्रम शीर्षक:

अध्ययन केंद्र:

दिनांक.....

(नाम तथा कोड)

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूप का सही अनुस्मरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुल्स्कैफ कागज का इस्तमाल करें जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज पर बायें, ऊपर और नीचे 4 सें. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) प्रश्नों का उत्तर लिखते समय स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 5) यह सत्रीय कार्य मार्च, 2013 तक ही वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे मार्च, 2013 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जुलाई, 2014 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 6) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

आपके लिए हमारा सुझाव है कि अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: MTE-13
सत्रीय कार्य कोड: MTE-13/TMA/2012
अधिकतम अंक: 100

- 1) क) ' $x^2 + y^2 = 3$, 4 से विभजित नहीं होता।' एक गणितीय कथन है।
ख) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ से $\{a, b, c, d\}$ तक आच्छादक फलनों की संख्या $4!S_6^4$ है।
ग) किसी अनुक्रम से संबद्ध जनक फलन कभी बहुपद नहीं हो सकता।
घ) $K_{4,4}$ असमतलीय होता है।
ङ) शीर्षों की संख्या विषम होने वाला प्रत्येक द्विभाजित ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय होता है। (10)
- 2) क) यदि p और q कथन हैं, तो दिखाइये कथन
 $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \rightarrow (\sim p)$
सर्वसत्य है।
ख) तर्कसंगत प्रमात्रकों का प्रयोग करके निम्नलिखित कथन और निषेध को प्रस्तुत कीजिये।
' एक सेमेस्टर में प्रत्येक अध्यापक कम से कम एक क्लास में अनुपस्थित रहता है।'
ग) मान लीजिए $n \in \mathbf{N}$ नियत है। $0 \leq r \leq n$ के लिए मान लीजिए कि $\#_n(r)$, r अव्यवों वाले $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या प्रकट करता है। प्रारंभिक प्रतिबंध के साथ अनुक्रम $\{\#_n(r)\}_{r=0}^n$ के लिए प्रथम क्रम पुनरावृत्ति ज्ञात कीजिए। (3)
घ) दर्शाइए कि कोटि 1 के ठीक दो शीर्षों वाला कोई भी वृक्ष एक पथ होता है। (3)
- 3) क) मान लीजिए \mathcal{F}_n n वी फिबोनाशी संख्या को व्यक्त करता है। आगमन द्वारा, यह दर्शाइए कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का योग
 $\mathcal{F}_{n_1} + \mathcal{F}_{n_2} + \dots + \mathcal{F}_{n_k}$
के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ प्रत्येक $i \geq 1$ के लिए $n_i - n_{i+1} \geq 1$ है। (4)
ख) यदि 2cm की भुजा वाले एक वर्ग में 5 बिन्दु लिये गये हों, तो दिखाइये कि हम ऐसे दो बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं जिनके बीच की दूरि अधिक से अधिक $\sqrt{2}\text{ cm}$ हो। (4)
ग) तुच्छतः सत्य और शून्यतः सत्य कथनों के उदाहरण दीजिए। (2)
- 4) क) $(x \wedge z) \vee (y \vee z')$ को DNF और CNF में लिखिए। (7)
ख एक पांसे को दो बार उछाला जाता है और आने वाली संख्याओं के योगफल को देखा जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि योगफल या तो पूर्ण(perfect) वर्ग होगा या पूर्ण घन? (3)
- 5) क) बूलीय फलन $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \vee x_3)$ के मानों की सारणी बनाइए। सारणी का प्रयोग करते हुए फलन को DNF में लिखिए। (5)
ख) अचर गुणांकों वाली रैखिक समघात पुनरावृत्ति के हल का व्यापक रूप ज्ञात कीजिए जिसके अभिलक्षणिक मूल, 1, -2 , 2 हों और जिसकी बहुकता क्रमशः 2, 1, और 2 हों। इस संबंध का एक असमघात भाग भी है जो कि $n3^n$, और $(-2)^n$ का एकघात संचय है। (5)
- 6) क) मान लीजिए A एक 8×8 बूलीय आव्यूह है (अर्थात प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है)। यदि A में सभी प्रविष्टियों का योगफल 51 हो, तो सिद्ध कीजिए कि A में एक पंक्ति i और स्तम्भ j है जिसमें पंक्ति i और स्तम्भ j की प्रविष्टियों का योगफल 13 से ज़्यादा है। इसके अलावा, दिखाइए कि इसमें ऐसी पंक्तियों और स्तंभों के कम से कम चार युग्म हैं। (4)

ख) यदि एक समतलीय ग्राफ G का कोटि अनुक्रम $\{2, 2, 2, 3, 4, 4, 5\}$ हो, इसके कितने क्षेत्र होंगे? इस कोटि अनुक्रम के साथ एक समतलीय ग्राफ खींचिए और उसके क्षेत्रों को संख्याकृत करके अपने उत्तर की जांच कीजिए। (4)

ग) निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध की कोटि और घात बताइए।

$$a_{n+2} = a_n^2 a_{n+1} + 2a_n a_{n-1}^3 + 4n$$

क्या पुनरावृत्ति समघात है? (2)

7) क) निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध

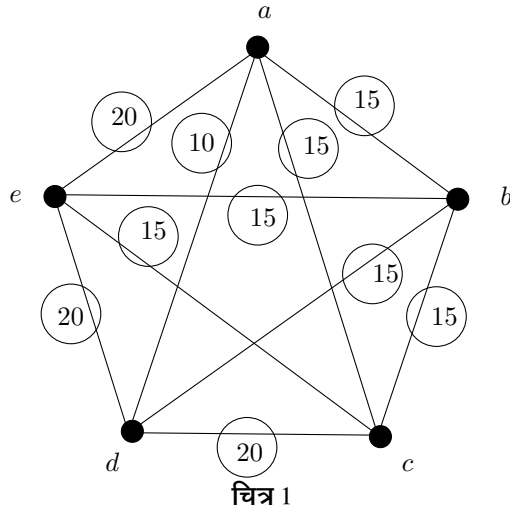
$$6a_{n+3} - 13a_{n+2} + 9a_{n+1} - 2a_n = 3^{-n}, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1.$$

हल कीजिए। (5)

ख) 0 और 999 के बीच (0 और 999 सहित) ऐसी कितनी संख्याएं हैं, जो 7 से या 11 से विभाजित नहीं हैं?

ग) यदि एक सेब का दाम ₹ 20 है, एक पपीता का दाम ₹ 15 और एक केला का दाम ₹ 2 है, तो ₹ n खर्च करके इन फलों को खरीदने के तरीकों के लिए एक जनक फलन लिखिए। (2)

8) क) चित्र 1 में दी गयी भारत पूर्ण ग्राफ लीजिए। हैमिल्टनी चक्र $\{a, b, c, d, e\}$ से प्रारंभ कीजिए और दो बार लघुकरण करके कम भार वाला हैमिल्टनी चक्र प्राप्त कीजिए। (3)



ख) प्रारम्भिक प्रतिबंधों $a_0 = 2, a_1 = 5$ के साथ पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_k = 6a_{k-1} - 5a_{k-2} + 1$ के लिए जनक फलन ज्ञात कीजिए। (4)

ग) $3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x$ को $[x]_4, [x]_3, [x]_2$ और $[x]_1$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

9) क) विभाजन $8 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1$ का फेरर ग्राफ प्राप्त कीजिए। सम्युग्मी विभाजन प्राप्त कीजिए। क्या यह विभाजन स्व-युग्मी है? (3)

ख) चित्र 2 में दी गई ग्राफ का एक अल्पिष्ठ शीर्ष रंजन (minimal vertex colouring) ज्ञात कीजिए। (5)

ग) क्या पीटर्सन ग्राफ द्विभाजित है? अपने उत्तर का कारण बताइए। (2)

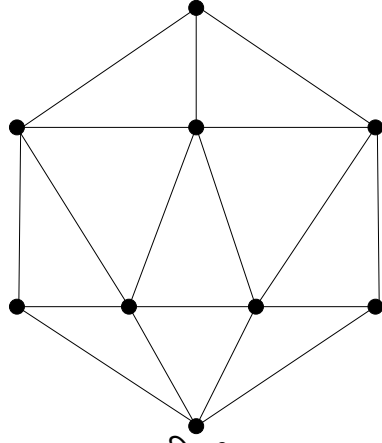
10) क) 6 अव्यवों वाले समुच्चय में कितने तुल्यता संबंध परिभाषित किए जा सकते हैं?

ख) चित्र 3 में दिया गया ग्राफ लीजिए।

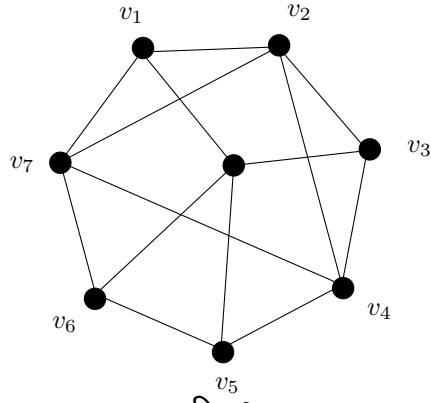
i) ग्राफ का घात अनुक्रम लिखिए।

ii) इस ग्राफ में लम्बाई 9 का एक चक्र प्रदर्शित कीजिए।

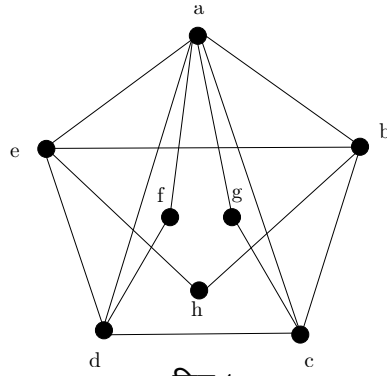
iii) क्या इसके उपग्राफ के रूप में कोई पूर्ण ग्राफ है? यदि हां तो एक ग्राफ प्रदर्शित कीजिए।



चित्र 2



चित्र 3



चित्र 4

- iv) इस ग्राफ़ के $\delta(G)$ और $\Delta(G)$ ज्ञात कीजिए।
- ग) सिद्ध कीजिए कि चित्र 4 में दिया गया ग्राफ़ आयलरीय है या नहीं। फूरी कलन-विधि (algorithm) लागू करके a से प्रारम्भ होने वाला आयलरीय परिपथ ज्ञात कीजिए। इसमें आप प्रयुक्त सेतुओं का उल्लेख स्पष्ट रूप से कीजिए। (10)