

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
संख्यात्मक विश्लेषण

एम. टी. ई. – 10

(01 जुलाई, 2012 से 31 मार्च, 2013 तक वैध)



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली
(जुलाई, 2012 सत्र के लिए)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

- 1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :
नाम :
पता :
.....
पाठ्यक्रम संख्या :
पाठ्यक्रम शीर्षक :
सत्रीय कार्य संख्या :
अध्ययन केंद्र :
दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 मार्च, 2013 तक वैद्य है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे 31 मार्च, 2013 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2013 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE-10
सत्रीय कार्य कोड : MTE-10/TMA/2012-13
अधिकतम अंक : 100

1. क) समीकरण $x^3 + 5x + 20 = 0$ का परिमाण में लघुतम ऋण मूल ज्ञात करना है।
i) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें यह मूल आविष्ट हो।
ii) समद्विभाजन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए।
iii) अंतिम अंतराल के अत्य बिन्दुओं को प्रारंभिक सन्निकटन मानकर छेदिका विधि की एक पुनरावृत्ति कीजिए। (5)
- ख) बर्ज-विष्टा विधि से समीकरण $3x^3 + 10x^2 + 10x + 7 = 0$ का वह मूल ज्ञात कीजिए जो -2.0 के निकट हो। इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। (3)
- ग) न्यूटन-रैफसन सूत्र से 12 का घन मूल ज्ञात कीजिए। (2)
2. क) एक ऐसा उपयुक्त पुनरावृत्ति फलन $\phi(x)$ ज्ञात कीजिए जिससे कि सूत्र $x_{k+1} = \phi(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ से प्राप्त पुनरावर्तकों का अनुक्रम $f(x) = 2x - \log_{10}x - 7 = 0$ के मूल की ओर अभिसरित होता है। इस सूत्र और प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 = 3.8$ का प्रयोग करके चार दशमलव स्थान तक की शुद्धता वाला मूल ज्ञात कीजिए। (4)

- ख) रैखिक समीकरण-निकाय
- $$4x_1 - x_2 = 3$$
- $$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
- $$-x_2 + 4x_3 = 3$$

के लिए गाउस जैकोबी पुनरावृत्ति योजना को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए। दिखइए कि पुनरावृत्ति योजना अभिसारी है। विधि की अभिसरण-दर भी ज्ञात कीजिए। (6)

3. क) तीन वर्गकरणों का प्रयोग करके ग्रैफे की मूल वर्गकरण विधि से बहुपद $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ के सभी मूल ज्ञात कीजिए। (7)
- ख) समीकरण $8x^5 + 12x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 18x + 5 = 0$ के कितने घन और ऋण मूल हैं? (3)

4. क) गाउस विलोपन विधि का प्रयोग समीकरण निकाय

$$x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3$$
$$\alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

को हल करने के लिए किया गया। α के वे मान ज्ञान कीजिए जिनके लिए निकाय का i) अद्वितीय हल ii) कोई हल नहीं iii) अनंत हल हों। (4)

- ख) प्रतिलोम घात विधि की चार पुनरावृत्तियाँ करके 2 के निकटतम, आव्यूह A का आइगनमान और संगत आइगनसदिश ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

5. क) निम्नलिखित समीकरण-निकाय हल करने के लिए गाउस-सिडल पुनरावृत्ति योजना को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए।

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

i) दिखाइए कि यह पुनरावृत्ति योजना अभिसारी होती है और अभिसारी दर ज्ञात कीजिए।

ii) शून्य सदिश को प्रारंभिक सन्निकरन लेकर इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। (7)

ख) LU वियोजन विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

6. क) अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित आंकड़ों के लिए ठीक बैठता हो :

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	1.5	1.75	3	4.75	7

(3)

ख) लग्रांज रूप के अंतर्वेशी बहुपद का प्रयोग करके निम्नलिखित मान तालिका से $y=3$ पर x का मान ज्ञात कीजिए :

x	4	7	10	12
y	-1	1	2	4

(3)

ग) लग्रांज अंतर्वेशन सूत्र लागू करके यह सिद्ध कीजिए कि सन्निकटतः

$$y_i = y_3 - 0.3(y_5 - y_{-3}) + 0.2(y_3 - y_{-5}) \quad (4)$$

7. क) यदि $\log_{10}654 = 2.8156$, $\log_{10}658 = 2.8182$, $\log_{10}659 = 2.8189$, $\log_{10}661 = 2.8202$ दिए हुए हों तो $\log_{10}656$ ज्ञात कीजिए। (3)

ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $\frac{1}{x}$ के लिए कोणांकों (arguments) a, b, c, d वाला तृतीय विभाजित अंतर $\frac{-1}{abcd}$ के बराबर होता है। (3)

- ग) 0 और 1 के बीच फलन $f(x) = x^3$ के समदूरी मानों की तालिका में एक ऐसा अंतराल h ज्ञात कीजिए जिससे कि इस तालिका में द्विघाती अंतर्वेशन करने से 1×10^{-6} तक की परिशुद्धता प्राप्त हो जाए। (4)

8. क) निम्नलिखित तालिका से $f'(5)$ का मान ज्ञात कीजिए

x	0	2	3	4	5	6
F(x)	4	26	58	112	466	922

(3)

- ख) संख्यात्मक अवकलन सूत्र

$$y'(x_i) = ay(x_i - h) + by(x_i) + cy(x_i + h)$$

में अचर a, b, c के मान ज्ञात कीजिए, जिससे कि विधि उच्चतम कोटि की हो जाए। संगत रिचार्डसन बहिर्वेशन सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

(3)

- ग) स्टर्लिंग-सूत्र से 35 वर्ष की आयु वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि $y_{20} = 512, y_{30} = 439, y_{40} = 346, y_{50} = 243$ दिए हुए हैं जहां y_x , जीवन तालिका में x वर्ष की आयु वाले व्यक्तियों की संख्या है। (4)

9. क) नीचे की तालिका में $f(x)$ के मान दिए गए हैं

x	0.2	0.3	0.4
F(x)	1.2214	1.3499	1.4918

तीनों मानों का प्रयोग करते हुए $O(h^2)$ विधि से $f'(0.2)$ ज्ञात कीजिए। (2)

- ख) 7 कोटियां लेकर सिम्प्सन के एक-तिहायी नियम द्वारा $\int_0^1 \sqrt{\sin x + \cos x} dx$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। (4)

- ग) 3 और 5 कोटियां लेकर संयुक्त समलंबी नियम से समाकल

$$I = \int_0^1 x(1+x^2)^{1/2} dx$$

का मान ज्ञात कीजिए। बहिर्वेशन तकनीक लागू करके परिणाम में सुधार लाइए। (4)

10. क) अंतर समीकरण $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0; k = 0.1 \dots$ का हल ज्ञात कीजिए। विशेष हल भी ज्ञात कीजिए, जबकि $y_0 = 1$ और $y_1 = 6$. (2)

- ख) ऑयलर-विधि से IVP; $y' = \frac{1}{x^2 - 4y}; y(4) = 4$ हल कीजिए। $h = 0.2$ और $h = 0.1$ लेकर $y(4.2)$ ज्ञात कीजिए। मान $y(4.2)$ का बहिर्वेशन कीजिए। (2)

- ग) $O(h^4)$ की चिरप्रतिष्ठित रूंगे-कुट्टा विधि से IVP.

$$y' = 1 + y^2, y(0) = 0$$

हल कीजिए। $h = 0.2$ लेकर $y(0.4)$ ज्ञात कीजिए। प्राप्त किए गए हल की तुलना यथातथ हल से कीजिए और त्रुटि ज्ञात कीजिए। (6)