

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

प्रारंभिक बीजगणित

(01 जुलाई, 2012 से 31 मार्च, 2013 तक वैध)



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068
(जुलाई, 2012 सत्र के लिए)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

इस पुस्तिका के अंत में हमने आपकी जानकारी के लिए परीक्षा-पत्र का एक नमूना भी लगाया है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी सत्रीय कार्य उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी . की जगह छोड़ें।
- 4) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 मार्च, 2013 तक वैद्य है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे 31 मार्च, 2013 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2013 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

(खण्ड 1 तथा 2 को पढ़ने के बाद ही इसे पूरा कीजिए)

पाठ्यक्रम कोड : MTE-04
सत्रीय कार्य कोड : MTE-04/TMA/ 2012-13
कुल अंक : 100

1. निम्न कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। (अर्थात्, यदि आप किसी कथन को असत्य मानते हैं, तो इसे दिखाने के लिए छोटी उपपत्ति या एक उदाहरण दीजिए। यदि कथन सत्य है, तो इसे दिखाने के लिए भी एक छोटी उपपत्ति दीजिए। जैसे कि, यह दिखाने के लिए कि ‘{1, पदमा, नीला} एक समुच्चय है’ सत्य कथन है, आपको इसे सत्य बतलाने के लिए बताना होगा कि चूंकि यह तीन वस्तुओं का सुपरिभाषित संग्रह है, यह कथन सत्य है।)

- i) कथन यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$ है, तो $A \subseteq B \cap C'$ होगा के लिए, एक प्रति-उदाहरण है।
ii) $\{2,3,5, \text{भारत}, \phi\}$ एक सुपरिभाषित समुच्चय है।
iii) यदि $x + y + z = 12$ है, तो $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ का न्यूनतम मान है।
iv) यदि $f(x)$, R पर घात n का एक बहुपद है, तो इसके R में न्यूनतम $\frac{n}{2}$ भिन्न शून्यक होने चाहिए।
v) Z के दो उपसमुच्चयों के कार्तीय गुणनफल को ज्यामितीय रूप से एक आयत द्वारा निरूपित किया जाता है।
vi) $n \in Z$ के लिए, $(\sin \theta + i \cos \theta)^n + \sin n \theta + i \cos n \theta$ होता है।
vii) कोई भी शून्येतर वर्ग आव्यूह एक व्युत्क्रमणीय (या साधारण) आव्यूह है।
viii) गणितज्ञ गॉस ने बक्शाली पांडुलिपि लिखी थी।
ix) R में गुणांकों वाली, समीकरणों के किसी युग्म का एक हल होता है।
x) दो 2×2 आव्यूहों A और B के योग का सारणिक उनके सारणिकों का योग होता है। (20)

2. क) गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करते हुए, $n! \geq 2^{n-1} \forall n \geq 1$ को सिद्ध कीजिए। (4)

- ख) $\frac{i+3}{7+i}$ के ज्यामितीय और ध्रुवीय निरूपण प्राप्त कीजिए। (3)

- ग) दर्शाइए कि $(a+ib)^{\frac{m}{n}} + (a-ib)^{\frac{m}{n}}$ में मानों में से एक मान $2(a^2+b^2)^{\frac{m}{2n}} \cos\left(\frac{m}{n} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$, होता है, जहां $A, B \in R$ और $m, n \in Z$ हैं। (3)

3. क) समुच्चयों $A = \{x \in Z \mid x, 4 \text{ का एक गुणज है}\}$, और $B = \{x \in Q \mid -2 < x \leq 30\}$ है, और C , जो 40 के गुणनखंडों का एम समुच्चय है, पर विचार कीजिए। $A^c \cap B, B \cup C$ and $C \setminus A$ और को सूची विधि द्वारा और एक अकेले वैन आरेख में निरूपित कीजिए। (6)

ख) जांच कीजिए कि किन्हीं चार समुच्चयों A, B, C और D के लिए $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
तथा $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ होता है। (4)

4. क) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ के मूल ज्ञात करने के लिए, कार्डानों की विधि का प्रयोग कीजिए। (5)

ख) समीकरण $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$ को हल करने के लिए, फरारी की विधि का प्रयोग कीजिए। (7)

ग) $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$ को हल कीजिए, जबकि यह दिया है कि इसके दो मूलों का गुणनफल अन्य दोनों मूलों के गुणनफल के बराबर है। (6)

घ) यदि a, b, c, d समीकरण $x^5 - 1 = 0$, के मूल हैं, तो दर्शाइए कि $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) = 5$. है। (2)

5. क) नट और बोल्ट बनाने वाली एक फैक्ट्री में, मशीन A द्वारा 100 नट प्रति मिनट की दर से नटों का उत्पादन होता है। 1000 नटों के प्रत्येक समूह के उत्पादन के बाद, इसकी 5 मिनट तक सफाई करने की आवश्यकता होती है। मशीन B द्वारा 75 बोल्ट प्रति मिनट की दर से बोल्टों का उत्पादन होता है, जिसे 15000 बोल्टों के प्रत्येक समूह के उत्पादन के बाद 10 मिनट तक साफ करने की आवश्यकता होती है। यदि दोनों मशीनें एक ही समय पर उत्पादन प्रारंभ करती हैं, तो नट और बोल्ट के 9000 युग्मों के उत्पादन के लिए आवश्यक न्यूनतम समय कितना है? (4)

ख) कथन “यदि $f : X \rightarrow Y$ एक फलन है A तथा B और समुच्चय X के उपसमुच्चय हैं, तो $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ होता है” के लिए एक प्रत्यक्ष उपपत्ति और एक अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति प्रदान कीजिए। (6)

6. क) गॉसियन निराकरण विधि द्वारा समीकरणों के निम्न निकास का हल समुच्चय प्राप्त कीजिए:
 $5x + 3y + 14z = 4$, $y + 2z = 1$, $x - y + 2z = 0$, $2x + y + 6z = 2$. (5)

ख) निम्न समीकरणों के आलेख खींचिए और उनसे पहचान कीजिए कि यह संगत हैं या नहीं :
 $2 - 3y = 7 + 5x$, $x - \frac{2}{3}y = \frac{5}{2}$. (3)

ग) एक ऐसी रैखिक समीकरण लिखिए, जो उपर्युक्त (ख) में दिए हुए समीकरण-युग्म के संगत नहीं है। समीकरण के अपने चुनाव का औचित्य दीजिए। (2)

7. क) ऊपर 6(ख) और 6(ग) में प्राप्त रैखिक निकाय को आव्यूह संकेतन में पुनः लिखिए। (2)

ख) a का वह परिमेय मान प्राप्त कीजिए, जिसके लिए $\begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्यतर है। (3)

ग) क्या समीकरणों के निम्न निकाय को हल करने में क्रैमर-नियम का प्रयोग किया जा सकता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। (c)

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= -9 \\ 3x - y + 2z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 3. \end{aligned}$$

यदि इसका प्रयोग किया जा सकता है, तो हल प्राप्त करने के लिए इसका प्रयोग कीजिए। अन्यथा, इस निकाय को हल करने के लिए, निराकरण की प्रक्रिया का प्रयोग कीजिए। (5)

8. क) मान लीजिए कि a_1, a_2, \dots, a_n धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं तथा $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

है। $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$ and $\sum_{i=1}^n \frac{s-a_i}{a_i} \geq n(n-1)$. तथा सिद्ध करने के लिए, कोशी-स्क्वार्ज असमिका का प्रयोग कीजिए।

[संकेत: एक स्थिति के लिए, $\sum \frac{s}{a_i}$ and $\sum \frac{a_i}{s}$ और में असमिका का प्रयोग कीजिए, अन्य

स्थिति के लिए, $\sum a_i(s-a_i)$ and $\sum \frac{a_i}{(s-a_i)}$ और के असमिका का प्रयोग कीजिए।] (6)

ख) यह दर्शाने के लिए कि $\forall n$ और \forall ऋणैतर $a_k, 1 \leq k \leq n$, $1 + \left(\prod_i^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_i (1 + a_i)^{\frac{1}{n}}$ होता है, माध्यों की असमिका का प्रयोग कीजिए। (4)