

MTE-09

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम वास्तविक विश्लेषण

(01 जनवरी, 2012 से 31 दिसम्बर, 2012 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली
(जुलाई, 2012 सत्र के लिए)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2012 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2012 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2013 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: एम.टी.ई. - 09
सत्रीय कार्य कोड : एम.टी.ई.-09/टी.एम.ए./2012
अधिकतम अंक : 100

1. क) बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तरों के कारण दीजिए। 5 × 2 = 10

i) समुच्चय $S = [1, 2]$ संहत है।

ii) प्रत्येक संतत: फलन अवकलनीय होता है।

iii) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$, $x \neq 3$ का अस्तित्व होता है।

iv) \mathbb{R} पर निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन f

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय हो} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$$

$[-2, 3]$ में समाकलनीय है।

v) समुच्चय

$$X = \{\sqrt{p} : p \text{ एक धनात्मक अभाज्य संख्या है।}\}$$

में एक परिमेय संख्या समाविष्ट है।

2. क) फलन f के असांतत्य बिंदु और प्रत्येक असांतत्य का प्रकार भी ज्ञात कीजिए : (5)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{जब } x \leq 0 \\ 4 - 5x, & \text{जब } 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4x^2, & \text{जब } 1 < x \leq 2 \\ -12x + 2x, & \text{जब } x > 2 \end{cases}$$

यह भी जाँच कीजिए कि फलन f , $x = 1$ पर अवकलनीय है या नहीं।

ख) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ ज्ञात कीजिए। (3)

ग) जाँच कीजिए कि अन्तराल $]3, 7]$ और $[8, 12[$ तुल्य हैं या नहीं। (2)

3. क) सिद्ध कीजिए कि एक निरंतर हसमान फलन हमेशा एकक होता है। (3)

ख) असमिका $4 \leq 2x + 3 \leq 6$ को मापांक रूप में लिखिए। (2)

ग) बुलजानों-वायस्ट्रास प्रमेय का कथन दीजिए। निम्नलिखित समुच्चयों के लिए इसे सत्यापित कीजिए : (3)

i) पूर्णांक समुच्चय

ii) अंतराल $[2, \infty]$

घ) जाँच कीजिए कि सीमा $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{cosec} x)^x$ का अस्तित्व है या नहीं। (2)

4. क) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए। (6)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x > 0$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4 + 4} - \sqrt{n^4 - 4}]$

ख) अनुक्रमों के लिए कौशी के व्यापक अभिसरण नियम का प्रयोग कीजिए। जाँच कीजिए कि (4)

$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{a_n\}$ अभिसारी है या नहीं।

ग) $f(x) = |5-x| + |x-3|; x \in [2, 6]$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख बनाइए। जहाँ फलन अवकलनीय नहीं होता उन बिन्दुओं को ज्ञात करने के लिए आलेख का प्रयोग कीजिए। (5)

5. क) $f(x) = 3 - 5x^3 + 5x^4 - x^5$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानिक न्यूनतम और स्थानिक अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। (5)

ख) दिखाइए कि $R_n(x)$, जो e^{2x} का मैक्लोरिन श्रेणी प्रसार का लंग्राज रूप अवशेष है शून्य की ओर प्रवृत्त करता है जबकि $n \rightarrow \infty$ होता है। इस तरह e^{2x} का मैक्लोरिन का अनंत प्रसार ज्ञात कीजिए। (5)

ग) द्वितीय माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए। अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलनों $f(x) = x$ और $g(x) = \sin x$ के लिए इसकी जाँच कीजिए : (5)

6. क) यदि विभाजन P_2 , विभाजन P_1 का $[a, b]$ में एक अधिशोधन है, तो $L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$ और (6)

$U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$ होगा। इस परिणाम की अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर

परिभाषित फलन $f(x) = 2 \cos x$ और विभाजन $P_1 = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ और $P_2 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$

के लिए जाँच कीजिए।

ख) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2n} \frac{n^2}{(2n+r)^3}$ का मूल्यांकन कीजिए। (4)

7. क) कोशी के मध्य मान प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि (5)

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \tan \theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$$

- ख) यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 3x + \sin 5x}{x^3}$ का मान परिमित है तो 'a' का मान और इस सीमा का मान ज्ञात कीजिए। (5)
8. क) गणितीय आगमन सिद्धान्त लागू करके दर्शाइए कि पहली n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का जोड़ $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ होता है। (5)
- ख) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^3 - 6x - 1 = 0$ का 2 और 3 के बीच एक वास्तविक मूल है। (3)
- ग) जाँच कीजिए कि पूर्णाकों का समुच्चय गणनीय है या नहीं। (2)
9. क) वायस्ट्रस M-परीक्षण का प्रयोग करके दिखाइये कि निम्नलिखित श्रेणी एक समान अभिसारी है। $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. (5)
- ख) समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करके समाकलन $\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) dx$ का मूल्यांकन कीजिए। (5)