

BMTC-133

सत्रीय कार्य पुस्तिका

**स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एससी.जी / बी.ए.जी)**

वास्तविक विप्लेषण

1 जनवरी 2024 से 31 दिसंबर 2024 तक वैध



**विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
भैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068
(2024)**

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

	नामांकन
	संख्या.....
	नाम :
	पता :

पाठ्यक्रम संख्या	:
पाठ्यक्रम शीर्षक	:
सत्रीय कार्य संख्या	:
अध्ययन केंद्र	:
	दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2024 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2024 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2025 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: BMTC-133
सत्रीय कार्य कोड: BMTC-133/TMA/2024
अधिकतम अंक: 100

भाग क (20 अंक)

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु-उपपत्ति या प्रतिउदाहरण देकर कीजिए। (10)
 - i) प्रत्येक अनंत समुच्चय विवृत समुच्चय होता है।
 - ii) $p \wedge \sim q$ का निषेध $p \rightarrow q$ है।
 - iii) -1 अंतराल $] -2, 1]$ का सीमा बिन्दु है।
 - iv) फलन f के समाकलनीय होने के अनिवार्य प्रतिबंध है कि वह संतत हो।
 - v) $f(x) = |x-2| + |3-x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x=5$ पर अवकलनीय है।
2. निम्न में से प्रत्येक के लिए एक उदाहरण दीजिए। (10)
 - i) \mathbb{R} में एक समुच्चय जिसका अद्वितीय सीमा बिंदु हो।
 - ii) \mathbb{R} में एक समुच्चय जिसके किसी एक बिंदु को छोड़कर बाकी सभी बिंदु इसके सीमा बिंदु हों।
 - iii) एक समुच्चय जिसका कोई सीमा बिंदु ना हो।
 - iv) एक समुच्चय S जिसके लिए $S^\circ = \bar{S}$ हो।
 - v) \mathbb{N}_{odd} से \mathbb{Z} पर एक एकैकी-आच्छादन

भाग ख (30 अंक)

3. क) एक ऐसे अपसारी अनुक्रम का उदाहरण दीजिए जिसके दो अभिसारी उप-अनुक्रम हों। अपने दावे की पुष्टि कीजिए। (3)
- ख) दो अपसारी अनुक्रमों का गुणनफल अपसारी होता है। सत्य है या असत्य? पुष्टि कीजिए। (2)
- ग) मान लीजिए $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ कोई अनुक्रम है। दिखाइए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए किसी $N \in \mathbb{N}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $n \geq N$ से यह अर्थ निकलता है कि $a_n \in N_\varepsilon(L)$ है। (3)
- घ) दिखाइए कि $\left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ एक कौशी अनुक्रम है। (3)
- ड.) मान ज्ञात कीजिए : (4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{4+n^2} + \frac{n}{9+n^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right]$$

4. क) फलन f के असांतत्य के बिंदु ज्ञात कीजिए और उनमें से प्रत्येक बिंदु पर असांतत्य की प्रकृति ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{जब } x \leq 0 \\ 4-5x, & \text{जब } 0 < x \leq 1 \\ 3x-4x^2, & \text{जब } 1 < x \leq 2 \\ -12x+2x, & \text{जब } x > 2 \end{cases}$$

साथ ही यह जाँच कीजिए फलन f , $x=1$ पर अवकलनीय है या नहीं। (5)

- ख) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए।

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \quad (3)$$

- ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरंतर ह्रासमान फलन एकैकी होता है। (2)

- घ) $f(x) = 3 - 5x^3 + 5x^4 - x^5$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। (5)

भाग ग (50 अंक)

5. क) मान लीजिए $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ एक फलन है जो $f(x) = x^m(1-x)^n$ से परिभाषित है, जहाँ $m, n \in \mathbb{N}$ है। m और n के मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि रोल प्रमेय फलन f के लिए सत्य हो। (3)

- ख) मान लीजिए $f, [\alpha, \beta]$ पर एक अवकलनीय फलन है, और $x \in [\alpha, \beta]$ है। दिखाइए कि यदि $f'(x) = 0$ और $f''(x) > 0$ है तो f का x पर स्थानीय उच्चिष्ठ मान है। (3)

- ग) मान लीजिए $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0,2]$ पर संतत है और $]0,2[$ पर अवकलनीय है, और $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1$ है। (4)

(i) दिखाइए कि कोई $c_1 \in]0,1[$ इस प्रकार है कि $f'(c_1) = 1$ है।

(ii) दिखाइए कि कोई $c_2 \in]1,2[$ इस प्रकार है कि $f'(c_2) = 0$ है।

(iii) दिखाइए कि कोई $c \in]0,2[$ इस प्रकार है कि $f'(c) = \frac{1}{3}$ है।

6. क) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए। (6)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x > 0.$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4+9} - \sqrt{n^4-9}]$$

ख) दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{7n+2}$ सापेक्ष अभिसारी है। (4)

7. क) कॉशी मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \tan \theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

ख) वायस्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करके दिखाइए कि निम्नलिखित श्रेणी एकसमानतः अभिसरित होती है : (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

8. क) समाकलन-गणित के मूल प्रमेय का प्रयोग करके समाकल

$$\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$$

का मान ज्ञात कीजिए। (5)

ख) व्युत्क्रम फलन प्रमेय का प्रयोग करके दिखाइए कि $f(x) = 2x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ का व्युत्क्रम है। इसका व्युत्क्रम भी ज्ञात कीजिए। (5)

9. क) जाँच कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^5}{n^4 + x^3}$, $x \in [0, \alpha]$ एकसमानतः अभिसारी है या नहीं, जहाँ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ है। (4)

ख) दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ अंतराल $]0, 2\pi[$ पर एकसमानतः अभिसरित नहीं होती है। (4)

ग) यदि घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $] \alpha, \beta [$ में एकसमानतः अभिसरित होती है, तो $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n$ भी होगी। सत्य है या असत्य? पुष्टि कीजिए। (2)