

MTE-08

सत्रीय कार्य पुस्तिका

अवकल समीकरण

(01 जनवरी, 2025 से 31 दिसंबर, 2025 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2025

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरंतर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2025 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2025 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2026 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE - 08

सत्रीय कार्य कोड : MTE - 08/TMA/2025

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि उपपत्ति या प्रति उदाहरण की सहायता से कीजिए।
- i) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 0$ के हल का अस्तित्व है, परन्तु हल अद्वितीय नहीं है।
- ii) परवलय $y^2 = 4x$ के बिंदु $(t^2, 2t)$ पर सभी स्पर्श रेखाओं $ty = x + t^2$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण $x(y')^2 + yy' + 1 = 0$ है।
- iii) आंशिक अवकल समीकरण $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ जहाँ a, b, c अचर हैं, असमनिय होता है जब $b^2 - ac = 0$ हो।
- iv) अंतराल $]-\pi/2, \pi/2[$ में फलन $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$ तथा $f_4(x) = \tan^2 x$ रैखिकतः परतंत्र है।
- v) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^3 - y$ के हल में दो स्वेच्छ अचर शामिल होंगे। (10)

2. क) प्राचल विचरण विधि से समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x, 0 \leq x < \pi/2$$

को हल कीजिए। (4)

- ख) एक द्रव्यमान m जो मुक्त रूप से एक रेखा पर गतिशील है वह रेखा पर दिए गए एक बिन्दु की ओर उस बिन्दु से अपनी दूरी के समानुपाती बल से आकृष्ट होता है। यदि द्रव्यमान दिए गए बिन्दु से दूरी x_0 पर विश्रामावस्था से प्रारंभ होता है तो दिखाइए कि द्रव्यमान सरल आवर्त गति में गतिमान होता है। (4)

- ग) दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$$

के लिए e^{mx} विशेष समाकल है यदि $m^2 + am + b = 0$. अतः m का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए e^{mx} समीकरण

$$(x-2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (4x-7) \frac{dy}{dx} + (4x-6)y = 0$$

का एक विशेष समाकल हो। (2)

3. क) समीकरण $y'' + w^2 y = 0$ के संगत रिकेटी समीकरण ज्ञात कीजिए। (2)

ख) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = a + bx + cx^2$ को हल कीजिए जबकि दिया गया है कि $x = 0$ पर $y = d$
और $\frac{dy}{dx} = 0$. (2)

ग) अवकल समीकरण $y^2 \ln y = xpy + p^2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। क्या समीकरण का कोई विचित्र हल है? (3)

घ) समीकरण $x^2(y - px) = yp^2$ को क्लेरों रूप में समानीत कीजिए और फिर इसका पूर्ण हल ज्ञात कीजिए। (3)

4. क) यदि f और g स्वेच्छ फलन हों तो दिखाइए कि $u = f(x - vt + i\alpha y) + g(x - vt + i\alpha y)$,
समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ का हल होगा जहाँ, $\alpha^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. (2)

ख) निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए

i) $\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$ (3)

ii) $(yz + z^2)dx - xzdy + xydz = 0$ (3)

iii) $(z + z^3) \cos x dx - (z + z^3)dy + (1 - z^2)(y - \sin x)dz = 0$. (2)

5. क) यदि $y_1 = 2x + 2$ और $y_2 = -x^2/2$ समीकरण $y = xy' + (y')^2/2$ के दो हल हों तो क्या इनके अचर गुणज c_1y_1 और c_2y_2 , जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं, भी समीकरण के हल होंगे? क्या इनका योगफल $y_1 + y_2$ एक हल है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (2)

ख) परवलय कुल $x = cy^2$ की लंबकोणीय संवेदियाँ ज्ञात कीजिए और उनके ग्राफ बनाइए। (3)

ग) अवकल समीकरण $\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t) \frac{dy}{dt} = 0$ का व्यापक हल प्राप्त कीजिए। (5)

6. क) निम्नलिखित सीमा मान समस्या को हल कीजिए

$$u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = x(l - x), 0 \leq x \leq l$$
 (6)

ख) आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$$

को हल कीजिए। (4)

7. क) हल कीजिए : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x$. (3)

ख) हल कीजिए : $x^2 \frac{dy}{dx} = \cos x - 2xy, y(\pi) = 0, x > 0$. (3)

ग) प्राचल विचरण विधि से समीकरण $(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1+x) \frac{dy}{dx} + y = 4 \cos \ln(1+x)$ को हल कीजिए। (4)

8. क) सत्यापित कीजिए कि समीकरण

$$2(y+z)dx - (x+z)dy + (2y-x+z)dz = 0$$

समाकलनीय है और इसका पूर्वग ज्ञात कीजिए। (3)

ख) पृष्ठ-कुल $\phi(x+y+z, x^2+y^2-z^2) = 0$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। इस आंशिक अवकल समीकरण की कोटि क्या है? (3)

ग) रैखिक आंशिक अवकल समीकरण $x(y^2+z)p - y(x^2+z)q = (x^2-y^2)z$ का वह समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसमें सरल रेखा $x+y=0, z=1$ आविष्ट हो। (4)

9. क) समीकरण $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। (4)

ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0 \text{ जहां } p = \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

ग) सदिश $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ की दिशा में $P_0(1, 1, 1)$ पर $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ के दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए। (2)

10. क) शून्य प्रारंभिक विक्षेपण के संगत एकक लंबाई वाली कंपायमान डोरी के नियत सिरे का विक्षेपण ज्ञात कीजिए जहां, नीचे दिया गया $u(x)$ प्रारंभिक वेग है।

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

ख) जैकोबी विधि से समीकरण

$$2u_1xz + 3u_2y^2 + u_2^2u_3 = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। (4)

ग) हल कीजिए :

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy \quad (2)$$