MTE-07

सत्रीय कार्य पुस्तिका

उच्च स्तरीय कलन

1 जनवरी 2025 से 31 दिसंबर 2025 तक वैध

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068
2025

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्षिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रष्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देषों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन

संख्या…………………………..

नाम : …………………………..

पता : …………………………..

……………………...

पाठ्यक्रम संख्या : ………………………………..

पाठ्यक्रम शीर्षक : ………………………………..

सत्रीय कार्य संख्या : ………………………………..

अध्ययन केंद्र : ……………………………….. दिनांक : ……………………

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक काग़ज़ पर बांयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रष्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2025 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2025 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2026 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेषों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फ़ोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: एम टी इ -07
सत्रीय कार्य कोड: एम टी इ - 07/ टी एम ए/2025
अधिकतम अंक: 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। (10)

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 1$

(ii) तीन चरों वाला एक वास्तविक–मान फलन, जो सर्वत्र संतत है, अवकलनीय होता है।

(iii) $F(x,y) = (y+2, x+y)$ से परिभाषित फलन $F:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ किसी भी बिन्दु $(x,y)\in \mathbf{R}^2$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है।

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{यदि } y \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } y \text{ परिमेय नहीं है,} \end{cases}$

से परिभाषित फलन $f:[-1,1]\times[-2,2] \to \mathbf{R}$ समाकलनीय होता है।

(v) $f(x,y) = 1 - y^2 + x^2$ से परिभाषित फलन $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का $(0,0)$ पर एक चरम मान होता है।

2) (क) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए : (4)

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{8x^2-3}\right)^{1/3}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}$

(ख) बिन्दु $(1,2)$ पर फलन $f(x,y) = 1 + 5xy + 3^2 y$ का तृतीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। (3)

(ग) केवल परिभाषाओं को लागू करके $f_{xy}(0,0)$ और $f_{yx}(0,0)$ ज्ञात कीजिए, जबकि फलन

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$ (3)

के लिए इनका अस्तित्व होता हो।

3) (क) मान लीजिए

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y^4}{x^4 + y^8}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

दिखाइए कि $(0,0)$ पर सभी दिशाओं में f दिक् अवकलज होते हैं। (3)

(ख) मान लीजिए $x = e^r \cos\theta$, $y = e^r \sin\theta$ और f x और y का एक संततः अवकलनीय फलन है जिसके आंशिक अवकलज भी संततः अवकलनीय हैं। दिखाइए कि

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$ (5)

(ग) मान लीजिए $a=(1,2,3), b=(-5,3,-2), c=(2,-4,1)$, $\mathbf{R}^3$ के तीन बिन्दु हैं। $|2b-a+3c|$ ज्ञात कीजिए। (2)

4. (क) वक्रों $y=4x^2$ और $x=4$ से परिबद्ध और $\delta(x,y)=y$ के घनत्व वाले एक पतली शीट का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) $z=1$ और $z=x^2+y^2$ से परिबद्ध ठोस घनाकृति का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि घनत्व फलन, $\delta(x,y,z)=|x|$ हो। (5)

5. (क) ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिए और इसकी सहायता से

$$\int_C (3x^2-4y)\,dx-(2x+y^3)\,dy$$ का मान निकालिए,

जहाँ C, दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=36$ है। (4)

(ख) पृष्ठ $x^2+2y^2=1$ पर फलन $f(x,y)=x^2+y$ के चरम मान ज्ञात कीजिए। (6)

6. (क) $\mathbf{R}^2$ के एक विवृत उपसमुच्चय D पर दो अवकलनीय फलनों f और g की फलनक आश्रितता का आवश्यक प्रतिबंध बताने वाले प्रमेय का कथन दीजिए। निम्नलिखित फलनों f तथा g द्वारा परिभाषित इस प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

$$f(x,y)=\frac{y-x}{y+x},\ g(x,y)=\frac{x}{y}$$ (4)

(ख) अस्पष्ट फलन प्रमेय की सहायता से यह दिखाइए कि 1 के प्रतिवेश में एक ऐसा अवकलनीय फलन g होता है, जिससे कि $(2,1)$ के प्रतिवेश में $g(1)=2$ और $F(g(y),y)=0$ जहाँ

$F(x,y)=x^5+y^5-16xy^3-1=0$ से फलन F परिभाषित है। $g'(y)$ भी ज्ञात कीजिए। (3)

(ग) $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ द्वारा परिभाषित फलन f की $(1,-1)$ पर स्थानीय व्युत्क्रमणीयता की जाँच कीजिए। फलन f के लिए एक प्रांत ज्ञात कीजिए जिसमें f व्युत्क्रमणीय है। (3)

7. (क) $(0,0)$ पर निम्नलिखित फलन f के सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच कीजिए, जहाँ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$ (6)

(ख) फलन $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ से परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। इस फलन के दो स्तर वक्र भी ज्ञात कीजिए। (4)

8. (क) $\int_C (2x^2+3y^2)\,dx$ के मान निकालिए, जहाँ C $x(t)=at^2, y(t)=2at, 0\le t\le 1$ से प्राप्त वक्र है। (5)

(ख) द्विशः समाकलन का प्रयोग करके दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$ का आयतन ज्ञात कीजिए। (5)

9. (क) यदि $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ तो a और b के मान ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) मान लीजिए कि S और C $\mathbf{R}^3$ के उपसमुच्चय हैं। S मूल–बिन्दु पर केन्द्र वाला एकक विवृत गोलक है तथा C विवृत घन $= \{P(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$. (3)

निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $S \subset C$

(ii) $C \subset S$

(ग) निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र ज्ञात कीजिए : (2)

(i) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(iii) $x - y$

(iv) y / x

10. (क) क्या निम्नलिखित फलन $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x \neq 0, y \neq 0$ श्वार्ज़–प्रमेय की आवश्यकताओं को (1,1) पर संतुष्ट करता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

(ख) निम्नलिखित के स्तब्ध बिन्दु निर्धारित करके उनका वर्गीकरण कीजिए : (6)

(i) $f(x, y) = 4xy + x^4 - y^4$

(ii) $f(x, y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}, x > 0, \ y > 0$