MTE-07

l=h; dk;Z iqfLrdk

Lukrd mikf/k dk;Øe

,- ,l- Vh- & 01

mPp dyu

¼01 tuojh] 2023 ls 31 fnlacj] 2023 rd oS/k½

ijh{kk QkeZ Hkjus ls igys l=h; dk;Z tek djuk t:jh gSA

foKku fo|kihB
bfUnjk xka/kh jk"Vªh; eqDr fo'ofo|ky;
enkku x<+h] ubZ fnYyh – **110 068**

2023

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरंतर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक l=h; dk;l करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

l=h; dk;l l: lcf/kr funl'k

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ....

नाम : ....

पता : ....

....

....

पाठ्यक्रम संख्या : ....

पाठ्यक्रम शीर्षक : ....

सत्रीय कार्य संख्या : ....

अध्ययन केंद्र : .... दिनांक : ....

---

dk;l d lgh vkj 'kh?k eY;kdu d fy, fn;l x, ik:i dk lgh vu lj.k djA

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2023 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2023 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2024 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

'kHkdkeukvk d lkFkA

L=h; dk;l

ikB~;Øe dkM: ,e-Vh-bl-07
l=h; dk;l dkM : ,e-Vh-bl-07/Vh ,e ,/2023
vf/kdre vad: 100

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (10)

(क) फलन $f(x,y)=\dfrac{(x+2)(y-2)}{x+y}$ अपने प्रांत पर समघात है।

(ख) $\left\{3x+\dfrac{1}{2x}\,\middle|\,0<x<1\right\}$ ऊपर से परिबद्ध है।

(ग) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ f(x,y)=\dfrac{1+x}{x}, x\neq 0$, $[5,10]\times\mathbf{R}$ पर संतत है।

(घ) फलन $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R},\ f(x,y,z)=e^{2\cos\pi}$ गोले $x^2+y^2+z^2=1$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर समाकलनीय है।

(ङ.) यदि $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}, f(x,y)=10$ और $D=[3,10]\times[-1,5]$, तब $\iint_D f\,dx\ dy=420.$

2) (क) दिखाइए कि निम्नलिखित सीमाओं का अस्तित्व नहीं है : (6)

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{|y|}$

(ख) दिखाइए कि $f(x,y)=4xy-x^2-y^4$ का $(0,0)$ पर पल्याण बिंदु है। (4)

3) (क) दिशा $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ में $(0,0)$ पर

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ (5)

का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

(ख) निम्नलिखित फलनों के लिए जैकोबियन के श्रृंखला नियम को सत्यापित कीजिए : (5)

$x=e^{3u}, y=2u+5v-w, z=u+v$
$u=p+6, v=q^3, w=3r.$

4. (क) निम्नलिखित का अनिर्धार्य रूप पहचानिए और मूल्यांकन कीजिए: (5)

i) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{1 - \sin x}$

ii) $\lim_{x \to \infty} 2x(\ln(x+1) - \ln x)$

(ख) दिखाइए कि

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ y \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$, पर संतत है, लेकिन $f_x(0,0)$ का अस्तित्व नहीं होता। (5)

5. (क) दो चरों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन दीजिए। दिखाइए कि समीकरण $f(x,y) = y^2 - yx^2 - 2x^5 = 0,\ (1,-1)$ के प्रतिवेश में परिभाषित ऐसा संततः अवकलनीय फलन $y = g(x)$ का परिभाषित करता है। g का अवकलज भी ज्ञात कीजिए। (3)

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन फलनिकतः आश्रित हैं: (3)

$$u = 3x + 2y - z$$
$$v = x - 2y + z$$
$$w = x(x + 2y + z)$$

(ग) a और b के मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1.$$ (4)

6. (क) निम्नलिखित समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित करके, उसका मूल्यांकन कीजिए: (6)

$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$, जहाँ D प्रथम चतुर्थांश में प्रांत है और $x^2 + y^2 = 2x$ द्वारा परिबद्ध है।

(ख) $(0,0)$ से $(1,1)$ तक के रेखाखंड $y = x^2$ के अनुदिश और फिर $(1,1)$ से $(2,1)$ तक के रेखाखंड $y = 1$ के अनुदिश एक कण को ले जाने में बल $\overline{F} = (x^2 y, xy^2)$ द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। (4)

7. (क) परवलयज $z = 4 - x^2 - y^2$, के उस भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो xy-समतल के ऊपर स्थित है। (5)

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित समाकल पथ–स्वातंत्र्य है और उसका मूल्यांकन कीजिए: (5)

$$\int_{(0,\pi)}^{(1,\pi/2)} (e^x \cos y\ dx - e^x \sin y\, dy)$$

8. (क) $f(x,y) = \ln x + \frac{1}{y}$ द्वारा परिभाषित $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के प्रांत और परिसर क्या हैं? (2)

(ख) $f(x,y) = x\tan^{-1} y$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए किसी बिन्दु (x,y) पर f_{xy} का मूल्यांकन कीजिए। श्वार्ज प्रमेय द्वारा बिन्दु (x,y) पर f_{yx} का मूल्यांकन कीजिए। (4)

(ग) मान लीजिए f

$$f(x,y) = \left(\frac{|x|}{1+|x|}, \frac{|y|}{1+|y|}\right)$$

द्वारा परिभाषित फलन है। जाँच कीजिए कि संयुक्त फलन gof का अस्तित्व है या नहीं, जहाँ $g:\{(x,y): x^2+y^2 \le 4\} \to \mathbf{R},\ g(x,y) = xy$ द्वारा परिभाषित है। gof ज्ञात कीजिए। (4)

9. (क) समतल $z = 1-y$ के नीचे और बेलन $x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 1$ के अंदर का आयतन ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) निम्नलिखित समकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद समाकलित कीजिए:

$$\int_0^2 \int_{y/2} (x+y)^2 dx\, dy.$$ (5)

10. (क) $(0,\pi/2)$ पर $f(x,y) = e^{xy}\cos x$ के लिए द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। (5)

(ख) यदि $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} + y\sin\frac{1}{y}, & xy \ne 0 \\ 0 & , xy = 0, \end{cases}$ (5)