

## सत्रीय कार्य पुस्तिका

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## गणितीय निदर्शन

(1 जनवरी, 2022 से 31 दिसंबर, 2022 तक वैध)

स्नातक परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी स्नातक परीक्षा में नहीं बैठ सकते।  
अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

## केवल बी.एस.सी छात्रों के लिए

- बी.एस.सी कार्यक्रम में एच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों – रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान – में उपलब्ध हैं। एच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 से 64), **कम से कम दो** और **अधिकतम चार** विषयों में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के एच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 64 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 16 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।



विज्ञान विद्यापीठ

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068

2022

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उन्हें कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

### सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : .....

नाम : .....

पता : .....

.....  
.....

पाठ्यक्रम संख्या : .....

पाठ्यक्रम शीर्षक : .....

सत्रीय कार्य संख्या : .....

अध्ययन केंद्र : .....

दिनांक : .....

### कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2022 तक वैध हैं। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2022 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप 20 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

**शुभकामनाओं के साथ।**

## सत्रीय कार्य

पाठयक्रम कोड : MTE-14

सत्रीय कार्य कोड : MTE-14/TMA/2022

अधिकतम अंक : 100

1. क) वास्तविक जगत से जुड़ी हाल ही में घटी एक घटना या स्थिति बताइए जहाँ निहित समस्या का अध्ययन करने के लिए आप एक गणितीय निदर्श का सूत्रण करना चाहेंगे। अपने उत्तर की पुष्टि के लिए तर्क देते हुए आप यह बताइए कि इस समस्या के लिए आप किस प्रकार के निदर्शन का प्रयोग करेंगे। इस समस्या के लिए कम से कम 3 अनिवार्य और 3 गैर अनिवार्य तथ्य भी बताइए। (5)  
ख) ढाल वाले एक तल के आधार से, जो क्षैतिज के साथ कोण  $\alpha$  बनाता है, एक कण प्रक्षिप्त किया गया है। प्रक्षेप का आदि वेग क्षैतिज के साथ कोण  $\beta$  बनाता है।
  - i) प्रक्षेप-पथ (trajectory) का समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।
  - ii) वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ कण तल पर गिरता है।
2. क) एक केंद्रिय बल के अधीन एक कण उस पथ के अनुदिश गतिमान हो रहा है जो समीकरण  $r = a \tan \theta$  से प्राप्त होता है। दिखाइए कि त्रिज्या त्वरण  $\frac{k^2}{r^3} \left( 3 + \frac{2a^2}{r^2} \right)$  है, जहाँ  $k = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ । (5)  
ख) एक सरल लोलक के दोलन की आवर्त गति ज्ञात करने वाली समस्या के संबंध में उस स्थिति में सूत्रण प्राप्त कीजिए जबकि वायु प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती हो। इस सूत्रण का एक हल ज्ञात कीजिए। (5)
3. क) पृथ्वी की सतह से काफी ऊँचाई पर छाए बादल से वर्षा की एक बूंद गिरना प्रारंभ करती है। गिरने के दौरान वायु-प्रतिरोध के कारण बूंद मंद पड़ मंद पड़ती जाती है। यह प्रतिरोध बूंद की तात्क्षणिक चाल  $v(t)$  के अनुक्रमानुपाती हो, तो
  - i) निदर्श समीकरण लिखिए।
  - ii) क्या यह निदर्श स्थैतिक है या गतिक? क्यों?
  - iii) चाल  $v(t)$  का एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।
  - iv) समय  $t$  में परिवर्तन के साथ  $v(t)$  के व्यवहार पर चर्चा कीजिए।(5)  
ख) ऊँचाई  $h$  वाली एक मीनार से एक पत्थर ऊर्ध्वाधरतः नीचे गिराया गया है। उसी समय एक अन्य पत्थर को मीनार के आधार से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर वेग  $u$  से फेंका गया है। वेग  $u$  का निम्नतम मान क्या होगा जिससे कि दोनों पत्थर मध्य वायु में एक-दूसरे से मिलें? (5)
4. क) एक रोगी को एक दवा की  $Q \text{ mg/ml}$  खुराक एक नियत समय-अंतराल  $t$  पर दी जाती है। प्रयोग से यह दिखाया गया है कि रक्त में दवा का सांद्रण  $C$  निम्नलिखित नियम का पालन करता है
$$\frac{dC}{dt} = -k e^C$$
(6)

- i) यदि दवा कि पहली खुराक समय  $t = 0$  घंटे पर दी गई हो, तो बताइए कि  $T$  घंटा बीत जाने के बाद सांद्रण क्या होगा?
- ii) यह मानकर कि जब भी दवा दी जाती है तो सांद्रण में तात्क्षणिक वृद्धि हो जाती है, बताइए कि दूसरी खुराक देने और फिर से  $T$  घंटा बीत जाने के बाद सांद्रण क्या होगा?
- iii) दिखाइए कि  $T$  घंटे के अंतराल पर दी गई  $Q \text{ mg/ml}$  खुराक के सांद्रण का सीमंत मान  $R$  निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है

$$R = -\ln \frac{kT}{1 - e^{-Q}}$$

- ख) निम्नलिखित मांग और आपूर्ति फलनों के स्थैतिक स्थायित्व और गतिक स्थायित्व पर चर्चा कीजिए, जहाँ हम यह मान लेते हैं कि  $k = 3$ ,

$$D_t = -0.2p_t + 80$$

$$S_t = 0.3p_t + 40$$

5. क) प्रशांत महासागर के एक विशेष क्षेत्र में एक समय  $t$  पर मछलियों की संख्या  $x(t)$  और शार्कों की संख्या  $y(t)$  है। शार्कों का शिकार मछलियाँ हैं और इन्हें मछलियों से अलग रखने पर इनकी संख्या में कमी आने लगती है। इसके अतिरिक्त हम निम्नलिखित कल्पनाएँ भी मानकर चलते हैं:

- 1) अलग-अलग रहने पर शार्क और मछलियों की संख्याओं में हो रहा परिवर्तन क्रमशः शार्क और मछलियों की वर्तमान संख्याओं के समानुपाती है।
- 2) मछुवारों द्वारा पकड़े गए शार्कों और मछलियों की संख्या क्रमशः शार्क और मछलियों की वर्तमान संख्या के अनुपाती है। शार्क और मछलियों के पकड़ने की विधि में कोई अंतर नहीं माना गया है।
- 3) शार्कों द्वारा खायी गई मछलियों की संख्या वर्तमान मछलियों की संख्या और वर्तमान शार्कों की संख्या के गुणनफल के सीधे अनुपाती है।
- 4) बचे हुए शार्कों की अतिरिक्त संख्या खायी गई मछलियों की संख्या के अनुपाती है। ऊपर 1) से 4) तक की गई कल्पनाओं के अधीन

- i) दी हुई समस्या का गणितीय निदर्श सूत्रित कीजिए और इसे नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निकाय लिखिए।
- ii) क्या i) में प्राप्त किया गया समीकरण-निकाय एक स्वायन्त निकाय है? अपने उत्तर के कारण बताइए।
- iii) ऊपर i) में दिए गए निकाय का अपरिवर्ती अवस्था हल ज्ञात कीजिए। प्राप्त किया गया हल किससे संबंधित है?

- iv) i) में प्राप्त किए गए समीकरण-निकाय से  $\frac{dy}{dx}$  का व्यंजक प्राप्त कीजिए और इस तरह प्रतिबंध  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  के अधीन इसे हल कीजिए।

- ख) निष्कासन बिना समांग रूप एक-दूसरे के साथ मिल-जुल कर रहने वाले वाले व्यक्तियों की एक संवृत जनसंख्या लीजिए। मान लीजिए समय  $t = 0$  पर  $n$  सुग्राह्यों के ग्रुप में संक्रामक व्यक्तियों की संख्या  $a(a > 0)$  मिलायी गयी है और संक्रामक व्यक्तियों और सुग्राह्यों के संपर्क में आने से सक्रमण फैलता है।

- i) दी हुई समस्या का गणितीय निदर्श सूत्रित कीजिए और इसे नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण लिखिए।
- ii) किसी भी समय  $t$  पर सुग्राह्यों और संक्रामक व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
- iii) वह समय ज्ञात कीजिए जबकि नए संक्रामकों के प्रकटन की दर अधिकतम हो और साथ ही उस समय पर सुग्राह्यों का घनत्व भी ज्ञात कीजिए। (8)
6. क) एक पूरी तरह से प्रतियोगी बज़ार में आपूर्ति फलन  $S(p)$  और मांग फलन  $D(p)$  इस प्रकार है:
- $$S(p) = -\frac{p^2 + 17}{4}; D(p) = -p + 5, \text{ जहाँ } p \text{ कीमत है।}$$
- i) संतुलित कीमत ज्ञात कीजिए।
- ii) वालरासीय स्थिरता प्रतिबंध को लागू करने यह मालूम कीजिए कि संतुलित कीमत स्थायी है या नहीं। (4)
- ख) जब ऑक्सीजन  $2.5 \times 10^{-8} \text{ cm}$ , मोटाई वाले रेड सेल जिसके दोनों सिरों को एक नियत सांद्रण  $C_0$  पर रखा गया हो, से विसरित होती हो, तो धारा घनत्व ज्ञात कीजिए। (3)
- ग) मान लीजिए एक स्लैब, 13 mg वाले नियम सांद्रण विलेय के एक बड़े बेदिंग घोल में एक जैविक सेल को निरूपित करता है। किसी दी हुई स्थिति  $0 < x < h$  और समय  $t > 0$  पर सेल के अंदर सांद्रण बंटन ज्ञात कीजिए। (3)
7. क) एक कारखाने में टेलीविजन की मरम्मत करने वाले एक व्यक्ति के पास मरम्मत के लिए टेलीविजन यद्रच्छया औसतम चार प्रतिदिन की दर से आते हैं और प्रत्येक टेलीविजन की मरम्मत करने में वह औसतम  $1 \frac{1}{2}$  घंटा लेता है। यहाँ यह मान लिया है कि मरम्मत में लगने वाला समय चरघांताकीय बंटित है। बताइए कि कारखाने में टेलीविजनों की औसत संख्या क्या है? इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि कारखाने में आने वाले टेलीविजन से पहले ही वहाँ कम 3 टेलीविजन सेट पहले से रखे होंगे? मरम्मत करने वाला व्यक्ति एक दिन में आठ घंटा काम करता है। (5)
- ख) निम्नलिखित त्रिघात लागन फलन लीजिए
- $$C = 0.004q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$$
- यहाँ यह मान लीजिए कि  $q$  की कीमत प्रति इकाई 13 है। वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता है। (5)
8. क) मान लीजिए पिछला पूर्वानुमान 2083 था और पिछली अवधि में इंटरैस्ट-चर का वास्तविक मान 1975 था और इंटरैस्ट का सबसे पुराना मान 1945 था। हाल ही के चार प्रेक्षणों पर आधारित गतिमान औसत तकनीक को लागू करने अगली अवधि का नया पूर्वानुमान ज्ञात कीजिए। (5)
- ख) मान लीजिए एक उपभोक्ता का उपयोगिता फलन  $U = q_1 \sqrt{q_2}$  है। मान लीजिए  $p_1 = \text{Rs.}250/-$ ,  $p_2 = \text{रु}0 400/-$  और इस अवधि में उपभोक्ता की आय  $\text{रु}0 15000/-$  है। उपभोक्ता के लिए आवश्यक वे मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि इस संचय द्वारा उपभोग करने पर उसका उपयोगिता फलन अधिकतम हो जाए। (5)

9. क) मान लीजिए  $P = (w_1, w_2)$  दो प्रतिभूतियों की एक निवेश-सूची है। निम्नलिखित स्थितियों में  $w_1$  और  $w_2$  के मान ज्ञात कीजिए। (6)

i)  $\rho_{12} = -1$  और  $P$  जोखिम मुक्त हो।

ii)  $\sigma_1 = \sigma_2$  और  $P$  पर प्रसरण न्यूनतम हो।

iii)  $P$  पर प्रसरण न्यूनतम हो और  $\rho_{12} = -0.5$ ,  $\sigma_1 = 2$  और  $\sigma_2 = 3$ .

ख) एक विशेष वस्तु उत्पादित करने वाली  $N$  अभिन्न फर्म हैं। प्रत्येक फर्म का  $q$  एकक उत्पन्न करने का लागत फलन  $q^3 + 2q^2 + 4q + 6$  एकक घन है। प्रत्येक फर्म का आपूर्ति फलन ज्ञात कीजिए। मांग फलन

$D(p) = N\left(\frac{22}{3} - p\right)$ . संतुलन मूल्य भी ज्ञात कीजिए। (4)