

**सत्रीय कार्य पुस्तिका****स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.एस.सी.)****उच्च कलन****(1 जनवरी, 2022 से 31 दिसंबर, 2022 तक वैध)****सत्रांत परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।**

किसी पाठ्यक्रम में पंजीकरण कराए बिना आप उसकी सत्रांत परीक्षा में नहीं बैठ सकते। अगर आप ऐसा करते हैं तो उस पाठ्यक्रम का परीक्षाफल रोक दिया जाएगा।

**केवल बी.एस.सी छात्रों के लिए**

- बी.एस.सी कार्यक्रम में एच्छिक पाठ्यक्रम चार विषयों — रसायन विज्ञान, भौतिकी, गणित और जीव विज्ञान — में उपलब्ध हैं। एच्छिक पाठ्यक्रमों के कुल क्रेडिट (56 से 64), **कम से कम दो** और **अधिकतम चार** विषयों में से हो सकते हैं।
- आपके द्वारा चुने गए किसी भी विषय में आपको **कम से कम 8 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम लेने होंगे। किसी भी विषय में आप **अधिक से अधिक 48 क्रेडिट** के एच्छिक पाठ्यक्रम ले सकते हैं।
- आप भौतिकी, रसायन तथा जीव विज्ञान के एच्छिक पाठ्यक्रमों के जितने कुल क्रेडिट लेते हैं, उनमें से **कम से कम 25 प्रतिशत प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों** के होने चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आप इन तीन विषयों में कुल 64 क्रेडिट के पाठ्यक्रम लेते हैं, तो इनमें से कम से कम 16 क्रेडिट प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों के होने चाहिए।

**विज्ञान विद्यापीठ****इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय  
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली— 110068****2022**

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उन्हें कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

### सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : .....

नाम : .....

पता : .....

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या : .....

पाठ्यक्रम शीर्षक : .....

सत्रीय कार्य संख्या : .....

अध्ययन केंद्र : ..... दिनांक : .....

### कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बाँयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2022 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2022 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप 2023 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

**शुभकामनाओं के साथ।**

## सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : **MTE-07**  
सत्रीय कार्य कोड : **MTE-07/TMA/2022**  
अधिकतम अंक : **100**

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य*? अपने उत्तर के लिए उचित कारण दीजिए। (10)

(क) यदि  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  और  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ , तब बाद  $S_1 \subset S_2$ .

(ख)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1}$  का अस्तित्व नहीं है।

(ग)  $f(x, y) = \sin(e^x + e^y)$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  के लिए  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ ।

(घ) निम्नलिखित फलन :  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1, y > 0\}$  पर फलनिकतः आश्रित नहीं हैं :

$$f(x, y) = \frac{2x + 2y}{2x} \text{ एवं } g(x, y) = \frac{2x + 2y}{2x}.$$

(ङ)  $f(x, y, z) = |x + y + z|$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  पर समाकलनीय है।

2) (क)  $x = 0, y = 4$  और  $y = 2x$  द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर  $f(x, y) = x + y$  द्वारा परिबद्ध फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  का द्विक समाकलन को परिकलित कीजिए। (3)

(ख) मान लीजिए :  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8y^3}{x^2 + 4y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

दिखाइए कि फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R}^2$  पर संतत है। (5)

(ग) भागफल फलन  $\frac{f}{g}$  का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x, y) = 4xy$  और  $g(x, y) = x^3 + y^3$  द्वारा परिभाषित हैं। (2)

3) (क) यदि  $x, y, z, u$  और  $v$  निम्नलिखित समीकरणों द्वारा संबद्ध हैं :  
 $xy + yz + uv = 0$  एवं  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 0$   
तब  $\frac{\partial u}{\partial y}$  परिकलित कीजिए। (4)

(ख) मान लीजिए  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि  $f$  दिशा  $\theta = \frac{\pi}{4}$  में,  $(0, 0)$  पर दिक्-अवकलज है या नहीं।

निष्कर्ष निकालिए कि फलन  $f$  बिन्दु  $(0, 0)$  पर अवकलनीय नहीं है। (3)

(ग)  $k$  पर किस प्रतिबंध के अधीन :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \text{ का अस्तित्व होता है ? इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए।} \quad (3)$$

4. (क)  $(0, 1)$  पर  $f(x, y) = 10 + 3x^2 + 2y^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  के द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। (4)

(ख) जाँच कीजिए (सत्यापित कीजिए) कि  $f(x, y) = x^2 - y^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  के लिए बिन्दु  $(2, 2)$  पर अस्पष्ट फलन प्रमेय लागू होता है या नहीं। (3)

(ग) मान लीजिए :  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$  और  $e_3 = (0, 0, 1)$  है। दिखाइए कि :

$$x = e_1 + 2e_2$$

$$\text{और } y = e_2 + e_3$$

क्रमशः बिन्दुओं  $(1, 2, 0)$  और  $(0, 1, 1)$  को निरूपित करते हैं। मूलबिन्दु से बिन्दु  $x + 5y$  की दूरी ज्ञात कीजिए। (3)

5. (क) लैग्रांज गुणांक विधि से समतल  $x + y = 1$  पर  $f(x, y) = xy$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  के चरम बिंदु ज्ञात कीजिए। इसके आगे, दिखाइये कि इस चरम बिंदु पर  $f$  का स्थानीय उच्चिष्ठ होता है। (4)

(ख) रैखिक फलन का प्रयोग करके फलन  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  की अवकलनीयता परिभाषित कीजिए। परिभाषा का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि फलन

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = x + y^2 + 5xy, \quad (1, 1) \text{ पर अवकलनीय है या नहीं।} \quad (4)$$

(ग) मान लीजिए :  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x^3 - 3y^3}{x^3 + 2y^3}\right)$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . (2)

6. (क) चरों में नीचे बताए गए परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए : (6)

$$\iiint_W \frac{x + 2y - z}{1 + (y + 3z)^2} dx dy dz$$

जहाँ :  $W : 0 \leq x + 2y - z \leq 3;$   
 $0 \leq y - z \leq 2;$

$$0 < y + 3z \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{रूपान्तरण : } \quad u &= x + 2y - z \\ v &= y - z \\ w &= y + 3z. \end{aligned}$$

(ख) बल  $F = (x^2, y^2)$  द्वारा रेखा-खण्ड (1,1) से (2,1) तक और फिर रेखा-खण्ड (2,2) से (2,2) तक के अनुदिश बिन्दु (1,1) से (2,2) तक कण को ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। (4)

7. (क) मान लीजिए :  $f : [0, 2] \times [3, 4] \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषा है। दिखाइए कि आयत  $[0, 2] \times [3, 4]$  के किसी विभाजक  $P$  के लिए  $L(P, f) = 2$  और  $U(P, f) = 4$ । (3)

(ख) मान लीजिए  $f(x, y) = x^2 - 9xy + 5y^2$ .  $\theta = \frac{\pi}{6}$  द्वारा दी गई दिशा में (0,0) पर  $f$  का दिक् अवकलन ज्ञात कीजिए। (3)

(ग)  $(x-1)$  और  $(y+2)$  की घातों में  $x^2y + 3y - 2$  का प्रसार कीजिए। (3)

8. (क) फलन  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$  के द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए। (3)

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन प्रांत  $]0, \pi[ \times \mathbf{R}$  पर फलनिकतः आश्रित हैं :

$$f(x, y) = e^y \sin^2 x, g(x, y) = y + 2 \ln \sin x \quad (4)$$

(ग) समाकल  $\iint_D (x - 3y^2) dx dy$  का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ . (3)

9. (क) यदि  $u = x^4y + y^2z^3$ , जहाँ  $x = rse^t, y = rs^2e^{-t}$  और  $z = r^2s \sin t$ , तब  $\frac{\partial u}{\partial s}$  का मान ज्ञात कीजिए, जब  $r = 2, s = 1, t = 0$  है। (6)

(ख) (0,0) पर निम्नलिखित फलन की पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि वे समान हैं या नहीं।

$$f(x, y) = \frac{(y-3x)(2+x^2)}{(2y+x)(1+y^2)}$$

इसके आगे, जाँच कीजिए कि युगपत् सीमा का अस्तित्व है या नहीं। (4)

10. (क) फलन

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 4$$

के स्तब्ध बिन्दु पता लगाइए और उन्हें वर्गीकृत कीजिए। (3)

(ख) क्या फलन  $f(x, y, z) = x + y + z$  और  $g(x) = 2x$  के लिए  $f \circ g$  और  $g \circ f$  का अस्तित्व होता है? अपने उत्तर के कारण दीजिए। (2)

(ग) वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  पर फलन  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  के निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। (5)