No. of Printed Pages : **11**

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2011

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt *any five* parts : **2x5=10**

(a) Determine whether

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ is hermitian or not.}$$

(b) If $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

then show that the Fourier transform of $f(x)$ is

$$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$$

(c) Obtain the analytic function whose real part is $u(x, y) = e^x \cos y$.

(d) Determine the Laplace transform of the function $f(t) = e^{-bt}$.

(e) Plot $J_0(x)$ as a function of x.

(f) Using the generating function

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \text{ For}$$

the Hermite polynomials $H_n(x)$ show that $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

(g) Locate the singularities of the function

$$f(z) = \frac{\log(z-1)}{z-2}.$$

(h) Define contravariant and covariant tensors of rank three.

2. Attempt *any two* parts : **5x2=10**

(a) For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

obtain the eigenvalues and the eigenvectors of A. Show that the eigenvectors are orthogonal. What are the eigenvalues of A^{-1} ?

(b) (i) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigenvalues can be only 1 and -1.

(ii) Matrix C is not hermitian. Show that $i\,(C - C^{+})$ is hermitian.

(c) Define an abelian group. Show that $\{1, -1\}$ is a subgroup of the multiplicative group $\{1, i, -1, -i\}$.

3. (a) Attempt *any two* parts : **5x2=10**

Calculate the value of the contour integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3\,(z+4)}, \text{ where } C \text{ is a circle } |z| = 2,$$

described in the anticlockwise sense.

(b) Show that $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$.

(c) Expand $f(z) = \cos z$ in Taylor series about $z = \pi/4$.

4. Attempt *any two* parts : **5x2=10**

(a) Write down the wave function in momentum space $\phi(p)$ as a Fourier transform of the wave function in configuration space $\psi(x)$.

If $\psi(x)$ is normalized to unity, then show that $\phi(p)$ is also normalized to unity. (Consider one-dimensional case only.)

(b) Apply Laplace transformation to the initial value problem,

$$f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = 0,$$
$$f(0) = 3,\ f'(0) = 1 \text{ to determine } F(s) = L[f(t)].$$

(c) Obtain the inverse Laplace transformation of

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+2)(s+1)^2}.$$

5. Attempt *any two* parts : **2x5=10**

(a) Derive the Rodrigues' formula for Hermite polynomials :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Using the generating function

$$g(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

(b) Using the generating function for the Lagnerre polynomials $L_n(x)$

$$g(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \quad |t| < 1,$$

derive the orthonormality relation

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \delta_{nm}.$$

(c) Bessel function of the first kind of order m is defined by

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\, \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Show that,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \sin x.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. ***कोई पाँच*** भाग करें : **2x5=10**

(a) निर्धारित करें कि :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ हर्मिटी आव्यूह है या नहीं।

(b) यदि $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

है तो सिद्ध करें कि $f(x)$ का फूरियर रूपांतर

$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{\sin ak}{k}$ होगा।

(c) वह विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसका वास्तविक भाग $u(x, y) = e^x \cos y$ है।

(d) फलन $f(t) = e^{-bt}$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित करें।

(e) x के फलन के रूप में $J_0(x)$ का आलेख खींचें।

(f) हर्मिट बहुपदों $H_n(x)$ के लिए जनक फलन

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$ का प्रयोग

कर सिद्ध करें कि $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

(g) फलन $f(z) = \dfrac{\log(z-1)}{z-2}$ की विचित्रता का स्थान निर्धारण करें।

(h) कोटि तीन वाले प्रतिपरिवर्ती और सहपरिवर्ती सदिश की परिभाषा बताइए।

2. कोई ***दो*** भाग करें : **5x2=10**

(a) आव्यूह A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात करें। सिद्ध करें कि ये आइगेन सदिश लांबिक हैं। A^{-1} के आइगेन मान क्या होंगे ?

(b) (i) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लांबिक दोनों हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन मान केवल 1 या -1 हो सकते हैं।

(ii) आव्यूह C हर्मिटी नहीं है। सिद्ध करें कि $i\,(C - C^{+})$ हर्मिटी है।

(c) आबेली समूह की परिभाषा बताइए। सिद्ध करें कि $\{1, -1\}$ गुणनात्मक समूह $\{1, i, -1, -i\}$ का एक उपसमूह है।

3. (a) कोई ***दो*** भाग करें : **5x2=10**

निम्नलिखित कन्टूर समाकल का मान परिकलित करें :

$$\int_C \frac{dz}{z^3\ (z+4)}, \text{ जहाँ } C\ |z| = 2 \text{ एक वृत्त है जो}$$

वामावर्त दिशा में परिभाषित है।

(b) सिद्ध करें कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

(c) $z = \pi/4$ के प्रति $f(z) = \cos z$ का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त करें।

4. कोई *दो* भाग करें : 5x2=10

(a) संवेग समष्टि $\phi(p)$ में तरंग फलन लिखें जो कि विन्यास समष्टि $\psi(x)$ में तरंग फलन का फूरिये रूपांतर है।

यदि $\psi(x)$ तरंग फलन प्रसामान्यीकृत है तो सिद्ध करें कि $\phi(p)$ फलन भी प्रसामान्यीकृत है। (केवल एक-विमिय स्थिति लें)।

(b) निम्नलिखित आदि-मान समस्या

$$f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = 0,$$
$$f(0) = 3, f'(0) = 1$$

पर लाप्लास रूपांतर लागू करके $F(s) = L[f(t)]$ ज्ञात करें।

(c) $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+2)(s+1)^2}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित करें।

5. कोई *दो* भाग करें : 2x5=10

(a) जनक फलन :

$$g(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

का उपयोग कर हर्मिट बहुपदों के लिए रोड्रिगेज सूत्र व्युत्पन्न करें,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

(b) लागेर बहुपद के जनक फलन :

$$g(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \; |t| < 1,$$

का उपयोग कर निम्नलिखित लांबिकता संबंध व्युत्पन्न करें :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \; L_n(x) \, L_m(x) \, dx = \delta_{nm}.$$

(c) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \; k \; \frac{1}{k! \, \Gamma \, (m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

सिद्ध करें कि :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; x^{-1/2} \; \sin x.$$