No. of Printed Pages : 8

MTE-13

01063

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

*Note : Question **1** is **compulsory**. Do any **four** questions from question numbers **2** to **7**. No calculators are allowed.*

1. Which of the following statements are false and which are true ? Justify your answer with a short proof or a counter example. **10**

(a) If $x, y, n \in \mathbf{N}$, the proposition $(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + y^2 = n)$ is true.

(b) The recurrence relation for number of bijections b_n of an n set is $b_n = n\ b_{n-1},\ n \geq 2,\ b_1 = 1.$

(c) Every tree is bipartite.

(d) The minimum number of vertices for a graph with 6 edges is 6.

(e) $$\sum_{k=0}^{n} C\ (n, k)\ 2^k = 3^n.$$

2. (a) Reduce the Boolean expression into DNF 3

$((a \wedge b)' \wedge c)' \wedge ((a' \vee c) \wedge (b' \vee c'))'$.

(b) Let a_n denote the number of ways of climbing a staircase with n steps such that one step or two steps are taken at a time. Find a recurrence relation for a_n along with the initial conditions that would be required for solving it. 3

(c) State Dirac's criterion for a graph to be Hamiltonian and prove it. 4

3. (a) Evaluate 4

$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-2)\ (n-1)\ n$.

(b) Solve the recurrence relation : 3

$a_n = 2\ a_{n-1} + 3\ a_{n-2}$ with $a_0 = a_1 = 1$.

(c) Prove the following relations 3

(i) $S_n^2 = 2^n - 1$

(ii) $S_n^{n-1} = \binom{n}{2}$,

4. (a) Give an indirect proof of the following statement by proving its contrapositive. If a function $f : X \to y$ satisfies 3

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ for all subsets A, B of X with $f(\phi) = \phi$, then f is $1-1$.

(b) Find the generating function for the number of ways to write the integer r as a sum of positive integers in which no integer appears more than three times. 3

(c) Prove that the graph is a tree if and only if any two distinct vertices are joined by a unique path. 4

5. (a) Test the validity of the argument : If I study, then I will not fail. If I do not play cricket, then I will study. But I failed. Therefore I played cricket. 4

(b) Prove : $x^n = \sum_{j=0}^{n} S_n^j \, [x]_j$ 4

Where S_n^j is the stirling number of the second kind and $[x]_j = x\,(x-1)\ldots(x-j+1)$.

(c) Suppose $X_1, \ldots, X_k$ partition the set $V(G)$ of vertices of a graph G such that no edge of G has both endpoints from the same set X_i, $1 \leq i \leq k$. Prove that G is k - colourable. 2

6. (a) Write the contrapositive, converse and negation of the following statement. 3

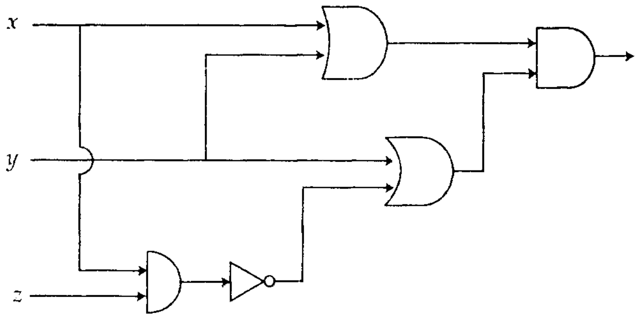
"For $x \in \mathbf{R}$, if $x^2 + x = 0$, then $x = 0$ or $x = -1$".

(b) Show that the number of partitions of 10 into distinct parts (integers) is equal to the number of partitions of 10 into odd parts. **4**

(c) Let $a_{n,k}$ denote the number of ways to select a subset of k objects from a set of n distinct objects. Find a recurrence relation for $a_{n,k}$. **3**

7. (a) If G is a k-critical graph, prove that $\delta(G) \geq k-1$ where $\delta(G)$ denotes the minimum degree of a vertex in G. **4**

(b) Find the boolean expression corresponding to the boolean circuit. **3**



(c) Using the principle of inclusion-exclusion find the number integer solutions to the equation $x+y+z=20$, with $0<x\leq 7$, $0<y\leq 8$, $0<z\leq 9$. **3**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न संख्या 1* ***अनिवार्य*** *है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से कोई* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *हैं।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं? लघु उपपत्ति और प्रति-उदाहरण से अपनी उत्तर की पुष्टि कीजिए। **10**

(a) यदि $x, y, n \in \mathbf{N}$, तब कथन

$(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + y^2 = n)$ सत्य है।

(b) एक n समुच्चय के आच्छादनो की संख्या b_n के लिए पुनरावृति संबंध $b_n = n\ b_{n-1}$, $n \geq 2$, $b_1 = 1$ है।

(c) प्रत्येक वृक्ष द्विभाजित होता है।

(d) 6 कोरों वाले ग्राफ के लिए शीर्षों की न्यूनतम संख्या 6 होती है।

(e) $\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, 2^k = 3^n.$

2. (a) बुलीय व्यंजक 3

$((a \wedge b)' \wedge c)' \wedge ((a' \vee c) \wedge (b' \vee c'))'$ को DNF में समानीत कीजिए।

(b) मान लीजिए a_n, n सीढ़ियों वाली सीढ़ी को चढ़ने के तरीकों को निरुपित करता है, जबकि एक समय में एक या दो सीढ़ियाँ चढ़ सकते हैं। a_n के लिए पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात करने के साथ-साथ इसे हल करने के लिए जरूरी प्रारंभिक प्रतिबंध भी बताइए। 3

(c) ग्राफ के हैमिल्टोनीय होने के लिए डिराक-निकष दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए। 4

3. (a) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 4

$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-2)\ (n-1)\ n.$

(b) पुनरावृत्ति संबंध : 3

$a_n = 2\ a_{n-1} + 3\ a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$, को हल कीजिए।

(c) निम्नलिखित संबंधों को सिद्ध कीजिए : 3

(i) $S_n^2 = 2^n - 1$

(ii) $S_n^{n-1} = \binom{n}{2}$,

4. (a) प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति देकर निम्नलिखित कथन की परोक्ष उपपत्ति दीजिए यदि फलन $f : X \to y$, जहाँ $f(\phi) = \phi$ है, X के सभी उपसमुच्चयों A, B के लिए $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ को संतुष्ट करता है तब $f\, 1-1$ होगा। 3

(b) पूर्णांक r को धन पूर्णांको के योग के रूप में लिखने के ऐसे तरीकों की संख्या के लिए जनक फलन ज्ञात कीजिए जिसमें कोई भी पूर्णांक तीन बार से ज्यादा नहीं आता हो। 3

(c) सिद्ध कीजिए कि ग्राफ एक वृक्ष है यदि और केवल यदि कोई दो अलग-अलग शीर्ष एक अद्वितीय पथ से जुड़े हों। 4

5. (a) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं : 4
'यदि मैं पढ़ाई करता हूँ, तो मैं फेल नहीं होता। यदि मैं क्रिकेट नहीं खेलता, तब मैं पढ़ाई करता हूँ। लेकिन मैं फेल हो गया। इसलिए मैं क्रिकेट खेला।

(b) सिद्ध कीजिए : $x^n = \sum_{j=0}^{n} S_n^j\, [x]_j$ जहाँ S_n^j द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्या है और $[x]_j = x(x-1)\dots(x-j+1)$. 4

(c) मान लीजिए $X_1, \dots, X_k$ ग्राफ G के शीर्षों के समुच्चय V(G) को ऐसे विभाजित करता है जिसमें G के कोई कोर के एक ही समुच्चय X_i, $1 \le i \le k$ से दो अंत्यबिन्दु नहीं हैं। सिद्ध कीजिए कि G, k-रंगनीय है। 2

6. (a) निम्नलिखित कथन का प्रतिपरिवर्तित, विलोम और निषेध लिखिए : 3

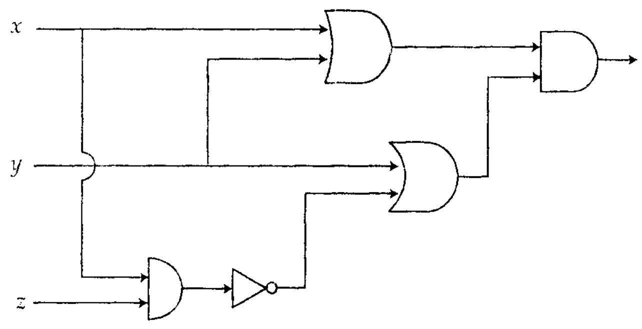
"$x \in \mathbf{R}$ के लिए, यदि $x^2 + x = 0$, तब $x = 0$ या $x = -1$".

(b) दिखाइए कि 10 को अलग-अलग हिस्सों (पूर्णांकों) में विभाजित करने की संख्या 10 को विषम हिस्सों में से विभाजित करने की संख्या के बराबर होती है। 4

(c) मान लीजिए $a_{n,k}$ n अलग-अलग वस्तुओं के समुच्चय से k वस्तुओं के उपसमूह को चुनने के तरीकों की संख्या को निरूपित करता है। $a_{n,k}$ के लिए पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए। 3

7. (a) यदि G एक k-क्रांतिक ग्राफ है, सिद्ध कीजिए कि $\delta(G) \geq k-1$ जहाँ $\delta(G)$, G में शीर्ष की न्यूनतम कोटि को निरूपित करता है। 4

(b) बूलीय परिपथ के संगत बुलीय व्यंजक ज्ञात कीजिए। 3



(c) आविष्टि-अपवर्जन नियम से पूर्णांकों $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$, $0 < z \leq 9$ में समीकरण $x + y + z = 20$, के हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। 3
