No. of Printed Pages : **12**

MTE-11

01828

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question No. 7 is* ***Compulsory****. Answer* ***any four*** *questions from questions No.* **1** *to* **6**. *Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) In a frequency distribution, the coefficient of skewness based on quartiles is 0.6. If the sum of lower and upper quartile is 100 and median is 38. Find the value of upper and lower quartiles. **3**

(b) Let $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \; ; 0 \leq x \leq \theta$ **4**

For testing the $H_0 : \theta = 1$ against $\theta = 2$ by means of a single observed value of x, find the size of type I and type II errors if the critical region is $1 \leq x \leq 1.5$. Also obtain the power of the test.

(c) Let x is a random variable with p.d.f **3**

$$f(x) = \frac{x}{2} \; ; 0 < x < 2$$

Find the density function of $y = 4 - x^3$.

2. (a) The two lines of regression y on x and x on y in a bivariate distribution are $x+9y=7$ and $y+4x=\frac{49}{3}$ respectively. 5

Find (i) coefficient of correlation (ii) mean of x and y. (iii) ratio of variance of x to that of variance of y (iv) Estimate x when $y=10$.

(b) The local authorities in a certain city install 1000 electric lamps in the streets of a city. If these lamps have an average life of 100 burning hours with standard deviation of 20 hours, assuming normality, what number of lamps might be expected to fail (i) in the first 80 burning hours. (ii) between 80 and 120 burning hours. After what period of burning hours would you expect that 10% of the lamps would fail ? 5

[You may like to use the following values : $\phi(1)=0.8413$, $\phi(1.28)=0.9$, $\phi(1.3)=0.9032$]

3. (a) In 2009, there will be 3 candidates for the post of principle - A, B and C - whose chances of getting appointment are in the proportion 4 : 2 : 3 respectively. The probability that A if selected would introduce co-education in the college is 0.3. The probabilities of B and C doing the same are 0.5 and 0.8. 5

(i) What is the probability that there will be co-education in the college in 2010 ?

(ii) If there is a co education in the college in 2010, what is the probability that C is the principal.

01828

(b) Find the maximum likelihood estimator for the parameter α of the population having density function $f(x) = \frac{2}{\alpha^2}(\alpha - x)\ ;\ 0 < x < \alpha$ for a sample of unit size. Is this estimator obtained unbiased ? Justify your answer. 5

4. (a) Let x and y be jointly discrete random variables with probability function. 5

$$p\,(x, y) = \frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = (-3, -5), (-1, 1), (1, 1) \text{ and } (3, 5)$$

Compute E (x), E (y), E $(x\,y)$ and E (x/y). Check whether x and y are independent or not. Justify.

(b) The mean of two samples of sizes 50 and 100 are 54.1 and 50.3 and the standard deviations are 8 and 7. Obtain the mean and standard deviation of the sample of size 150 by combining the above two samples. 5

5. (a) Let x have the p.d.f $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 5

Find the actual probability

$$p\ (1x - \mu| > \frac{3}{2}\sigma)$$

where μ and σ are the mean and standard deviation of x. Also compare it with the upper bound obtained by chebychev's inequality.

(b) Let x and y be two independent random variables such that ; 5

$p\ (x = r) = p\ (y = r) = q^r p\ ;\ r = 0, 1, 2, ...$

Find the m.g.f. of $(x + y)$ and hence or otherwise find the distribution of $x + y$.

6. (a) An urn contains 4 tickets marked with the numbers 112, 121, 211 and 222. One ticket is drawn at random. Let Ai be the event that i^{th} digit of the number drawn is 1 $(i = 1, 2, 3)$ check whether the events A_1, A_2 and A_3 are mutually independent or not, Justify. 4

(b) A gas company has determined from the past experience that at the end of winter, 80% of its accounts are fully paid, 10% are one month in arrears, 6% are 2 months in 6

arrears and 4% are more than 2 months in arrears. At the end of this winter, the company checked a random sample of 400 of its accounts finding 287 to be fully paid, 49 to be one month in arrears, 30 to be 2 months in arrears and 34 to be more than 2 months in arrears. At 5% level of significance test the hypothesis that the pattern of previous years is still being followed in this winter ? (You may like to use the following values : $\chi^2_{3, .05} = 7.815$

$\chi^2_{4, .05} = 9.488$ $\chi^2_{12, 0.05} = 5.991$)

7. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answer. **10**

(a) The correlation coefficient between x and y is 0.85 then the correlation coefficient between $\frac{x}{2}$ and $\frac{y}{2}$ is $\frac{0.85}{2}$.

(b) Beta distribution with parameters α and β reduces to uniform distribution in (0, 1) if $\alpha = 1$ and $\beta = 1$.

(c) If P (A) = P (B) = 1 then $P(A \cup B) = P(A \cap B) = 1$.

(d) If all the observations on a variable x are equal then Range, Mean deviation about mode and standard deviation are all equal to zero.

(e) Size of the critical region is same as the level of significance.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न 7* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न 1 से 6 में से* ***कोई चार*** *प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) किसी बारंबारता बंटन में, चतुर्थकों पर आधारित वैषम्य का गुणांक 0.6 है। यदि निम्न और उपरि चतुर्थकों का योग 100 है और माध्यिका 38 है, तो उपरि और निम्न चतुर्थकों के मान ज्ञात कीजिए। **3**

(b) मान लिजिए कि $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}$; $0 \leq x \leq \theta$ है। x के अकेले प्रेक्षित मान के माध्यम से $H_0 : \theta = 1$ प्रतिकूल $\theta = 2$ का परीक्षण करने के लिए, प्रकार I और प्रकार II की त्रुटियों की आमाप ज्ञात कीजिए, यदि क्रांतिक क्षेत्र $1 \leq x \leq 1.5$ है। साथ ही, परीक्षण की क्षमता भी ज्ञात कीजिए। **4**

(c) मान लीजिए कि p.d.f. $f(x) = \frac{x}{2}$; $0 < x < 2$ के साथ x एक यादृच्छिक चर है। $y = 4 - x^3$ का घनत्व फलन ज्ञात कीजिए। 3

2. (a) एक द्विचर बंटन में, x पर y और y पर x वाली दो समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः $x + 9y = 7$ और $y + 4x = \frac{49}{3}$ हैं। ज्ञात कीजिए। 5

(i) सहसंबंध गुणांक

(ii) x और y के माध्य

(iii) x के प्रसरण का y के प्रसरण से अनुपात

(iv) x का आकलन, जब $y = 10$ है।

(b) किसी शहर के एक स्थानीय प्राधिकरण ने उस शहर की सड़कों पर 1000 बिजली के बल्ब लगवाए। यदि इन बल्बों का औसत जीवन काल, 20 घंटे के मानक विचलन के साथ, 100 दहन घंटे है, तो प्रसामान्यता की कल्पना प्रसामान्यता करते हुए, कितने बल्ब (i) प्रथम 80 दहन घंटों में खराब हो जाएँगे ? (ii) 80 और 120 दहन घंटों के बीच खराब हो जाएंगे ? 5

कितने दहन घंटों के बाद आप यह आशा करते हैं कि 10% बल्ब खराब हो जाएँगे ?

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :
$\phi(1) = 0.8413$, $\phi(1.28) = 0.9$, $\phi(1.3) = 0.9032$]

3. (a) 2009 में, प्रिंसीपल के पद के लिए 3 प्रत्याशी A, B और C होंगे जिनके नियुक्त होने के संयोग क्रमशः 4 : 2 : 3 के अनुपात में हैं। इसकी प्रायिकता कि A चुन जाने पर कॉलेज में सह-शिक्षा लागू कर देगी 0.3 है। B और C द्वारा यही किए जाने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.5 और 0.8 हैं। 5

(i) इसकी क्या प्रायिकता है कि उस कालेज में 2010 में सहशिक्षा लागू हो जाएगी ?

(ii) यदि 2010 में, उस कालेज में सहशिक्षा हो, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि C प्रिंसीपल है ?

(b) घनत्व फलन $f(x) = \frac{2}{\alpha^2}(\alpha - x)$; $0 < x < \alpha$ वाली समष्टि का प्राचल α के लिए, एकक आमाप के एक प्रतिदर्श हेतु, अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। क्या इस प्रकार प्राप्त आकलक अनभिनत है ? अपने उत्तर का औचित्य कीजिए। 5

4. (a) मान लीजिए कि x और y संयुक्त वियुक्त यादृच्छिक चर हैं, जिनका प्रायिकता फलन 5

$(x, y) = (-3, -5), (-1, 1), (1, 1)$ और $(3, 5)$ पर

$p(x, y) = \frac{1}{4}$ है।

$E(x)$, $E(y)$, $E(x\,y)$ और $E(x \mid y)$ को अभिकलित कीजिए। जाँच कीजिए कि x और y स्वतंत्र हैं या नहीं। उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(b) 50 और 100 साइज़ों वाले दो प्रतिदर्शों के माध्य क्रमश: 54.1 और 50.3 हैं तथा इनके मानक विचलन क्रमश: 8 और 7 हैं। इन दोनों प्रतिदर्शों को संयोजित कर आमाप 150 वाले प्रतिदर्श के माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 5

5\. (a) मान लीजिए कि x का p.d.f. 5

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ है। वास्तविक

प्रायिकता $p\,(1x - \mu| > \frac{3}{2}\sigma)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ μ और σ क्रमश: x के माध्य और मानक विचलन हैं। साथ ही, इसकी तुलना शेबीचेव असमिका से प्राप्त उपरि परिबंध से कीजिए।

(b) मान लीजिए कि x और y दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर इस प्रकार हैं कि ; 5

$p\,(x = r) = p\,(y = r) = q^r p \; ; \; r = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ है।

$(x + y)$ का m.g.f. ज्ञात कीजिए तथा इसी से अथवा अन्यथा $x + y$ का बंटन ज्ञात कीजिए।

6\. (a) एक बर्तन में, चार टिकट हैं जिन पर 112, 121, 211 और 222 अंकित हुए हैं। इसमें से एक टिकट यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। मान लीजिए कि Ai वह घटना है जिसमें निकाली गई संख्या का i *वाँ* अंक 1 है। $(i = 1, 2, 3)$ जाँच कीजिए कि घटनाएँ A_1, A_2 और A_3 परस्पर स्वतंत्र हैं या नहीं। औचित्य दीजिए। 4

(b) किसी गैस कंपनी ने अपने पूर्व अनुभव के आधार पर यह निर्धारित किया कि सर्दियों के अंत में 80% खातों का पूर्ण भुगतान प्राप्त हो जाता है, 10% खातों में एक महीने की बकाया राशि रहती है, 6% में 2 महीने की बकाया राशि रहती है तथा 4% में 2 से अधिक महीनों की राशि बकाया रहती है। इन सर्दियों के अंत में, कंपनी ने अपने 400 खातों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की जाँच की और इसमें पाया कि 287 खातों में पूरा भुगतान हो गया है, 49 खातों पर एक महीने का बकाया है, 30 में 2 महीने की बकाया राशि है तथा 34 में 2 से अधिक महीने की बकाया राशि है। सार्थकता के 5% स्तर पर इस परिकल्पना का परीक्षण कीजिए कि इन सर्दियों में भी पिछले वर्षों के पैटर्न का अनुपालन किया जा रहा है। (आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं: **6**

$\chi^2_{3, .05} = 7.815$ $\chi^2_{4, .05} = 9.488$

$\chi^2_{12, 0.05} = 5.991$)

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं? अपने उत्तरों लिए कारण दीजिए। **10**

(a) यदि x और y में सह संबंध गुणांक 0.85 है, तो $\frac{x}{2}$ और $\frac{y}{2}$ के बीच में सहसंबंध गुणांक $\frac{0.85}{2}$ होगा।

(b) प्राचल α और β के साथ बीटा बंटन (0, 1) में एकसमान बंटन में समानीत हो जाता है, जहाँ $\alpha = 1$ और $\beta = 1$ है।

(c) यदि $P(A) = P(B) = 1$ है, तो $P(A \cup B) = P(A \cap B) = 1$ है।

(d) यदि किसी चर पर सभी प्रेक्षण बराबर हों, तो परिसर, बहुलक के परित माध्य विचलन और मानक विचलन सभी शून्य के बराबर है।

(e) क्रांतिक क्षेत्र का साइज वही होता है, जो सार्थकता का स्तर है।