BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

00838

MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50* *(Weightage 70%)*

Note : *Answer **any five** questions. All computation may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation ; **4**

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$$

Taking end points of this interval as initial approximations, perform 2 iterations of the secant method.

(b) Show by induction that **3**

$$\Delta^n [e^{ax}] = e^{ax} (e^{ah} - 1)^n$$

where Δ is the forward difference operator and h is the step size.

(c) For the method ; **3**

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi),$$

$x_0 < \xi < x_2$ determine the optimal value of h such that $|RE| = |TE|$.

2. (a) Find the truncation error and the order of the differentiation method. 5

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)].$$

Using this method and Richardson's extrapolation, find the improved value of $f'(2)$ with the help of the data.

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-7	1	9	65	217

(b) The following expression $x_{n+1} = \frac{3x_n^2+2}{8}$ is an iteration scheme to find a root of the equation $f(x) = 0$. Find the function $f(x)$. 5

3. (a) Determine α_1 and α_2 so that the order of the iterative method ; 6

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_1 W_1(x_k) - \alpha_2 W_2(x_k)$$

where $W_1(x_k) = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ and

$W_2(x_k) = \frac{f(x_k)}{f'[x_k + \beta W_1(x_k)]}$, $\beta \neq 0$, for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$ becomes as high as possible.

(b) Using interpolation on the following data 4

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-4	4	12	68	220

Obtain the approximate value of $f(3)$.

4. (a) Using Runge-Kutta fourth order method with h = 0.2, obtain the approximate value of y (0. 4) for the initial value problem 5

$$y' = x^2 + y + 1,\ y\ (0) = 0.$$

(b) Perform 2 iterations of the Newton-Raphson method to obtain the approximate value of $(18)^{1/4}$. Take the initial approximation $x_0 = 2.5$. 3

(c) Find the interval which contains the eigenvalues of the symmetric matrix 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Find the inverse of the matrix 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Using LU decomposition method. Take $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$.

(b) A function $f\ (x)$ defined on the interval [0, 1] is such that $f\ (0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $f\ (1) = 0$. Find the quadratic polynomial p (x) which agrees with $f\ (x)$ for $x = 0, \frac{1}{2}, 1$. 5

If $\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| \leq 1$ for $0 \leq x \leq 1$, show that

$$|\ f\ (x) - p(x)\ | \leq \frac{1}{12} \text{ for } 0 \leq x \leq 1.$$

6. (a) Using trapezoidal rule of integration with $h = \frac{1}{2}$ and $h = \frac{1}{4}$, find the approximate value of 5

$$I = \int_2^3 (x^2 - x + 1)\, dx.$$

Obtain the improved value using Romberg integration.

(b) Set up the Gauss-Seidel iteration scheme in matrix form to solve the system of equations. 5

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Find whether the iteration scheme converges or not.

7. (a) Use the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigen vector of the matrix 5

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Take the initial approximate eigen vector $v_0 = [1, 1, 1]^T$ and perform 3 iterations.

(b) Find the number of men getting wages between Rs. 10 and Rs. 15 from the following table. 5

Wages in Rs. x :	0-10	10-20	20-30	30-40
No. of men y :	9	30	35	42

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकरित कर सकते हैं। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

1. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x)=x^3-3x-1=0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के अंत्य बिन्दुओं को आदि सन्निकटन मान कर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 4

(b) आगमन द्वारा दिखाए कि : 3

$$\Delta^n\ [e^{ax}]=e^{ax}\ (e^{ah}-1)^n$$

जहाँ Δ अग्रांतर संकारक है और h सोपान लंबाई है।

(c) विधि ; 3

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}f'''(\xi),$$

$x_0<\xi<x_2$ के लिए h का ऐसा इष्टतम मान ज्ञात कीजिए जिसके कि $|RE|=|TE|$

2. (a) अवकलन विधि ; 5

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$ की रूंडन त्रुटि और कोटि ज्ञात कीजिए। इस विधि तथा रिचार्डसन बर्हिर्वेशन द्वारा निम्नलिखित आँकड़ें की मदद से $f'(2)$ के मान में सुधार कीजिए।

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-7	1	9	65	217

(b) व्यंजक $x_{n+1} = \dfrac{3x_n^2 + 2}{8}$ समीकरण $f(x) = 0$ का मूल ज्ञात करने की पुनरावृत्ति विधि है। फलन $f(x)$, ज्ञात कीजिए। 5

3. (a) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए α_1 और α_2 के वे मान ज्ञात कीजिए जिससे कि पुनरावृत्ति विधि ; 6

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_1 W_1(x_k) - \alpha_2 W_2(x_k)$$

जहाँ $W_1(x_k) = \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ और

$$W_2(x_k) = \frac{f(x_k)}{f'[x_k + \beta W_1(x_k)]}, \beta \neq 0,$$ का

कोटि अधिकतम हो जाए।

(b) निम्नलिखित आँकड़ों पर अंतर्वेशन द्वारा $f(3)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए : 4

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-4	4	12	68	220

4. (a) $h = 0.2$ लेकर आदि मान समस्या $y' = x^2 + y + 1,\ y(0) = 0,$ के लिए चतुर्थ कोटि रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा $y = (0.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। **5**

(b) $(18)^{1/4}$ का सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि की 2 पुनरावृत्तियाँ कीजिए। आदि सन्निकटन $x_0 = 2.5$ लीजिए। **3**

(c) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें सममित आव्यूह : **2**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ के आइगन मान अंतर्विष्ट हों।

5. (a) LU वियोजन विधि से आव्यूह : **5**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। $U_{11} = U_{22} = U_{33} = 1$ लीजिए।

(b) एक फलन $f(x)$ अन्तराल $[0, 1]$ पर इस तरह परिभाषित है जिसके लिए $f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1,$ $f(1) = 0.$ ऐसा द्विघाती बहुपद $p(x)$ ज्ञात कीजिए जो $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ के लिए $f(x)$ के समान हो। यदि $0 \le x \le 1,$ के लिए $\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| \le 1$ तो दिखाए कि $0 \le x \le 1$ के लिए **5**

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{12}.$$

6. (a) $h = \frac{1}{2}$ और $h = \frac{1}{4}$ लेकर समाकलन के समलंबी नियम द्वारा $I = \int_2^3 (x^2 - x + 1)\, dx$. का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। रोमबर्ग समाकलन द्वारा मान में सुधार कीजिए। 5

(b) निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधि को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए। 5

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

ज्ञात कीजिए कि पुनरावृत्ति विधि अभिसरित होती है या नहीं।

7. (a) घात विधि द्वारा आव्यूह : 5

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

का परिणाम में महत्तम आइगनमान और संगत आइगन सदिश ज्ञात कीजिए। आदि सन्निकट आइगनसदिश $v_0 = [1, 1, 1]^T$ लीजिए और 3 पुनरावृत्तियाँ कीजिए।

(b) निम्नलिखित तालिका से 10 से 15 रु. के बीच मज़दूरी प्राप्त करने वाले पुरुषों की संख्या ज्ञात कीजिए : 5

मज़दूरी (रु. में) x :	0-10	10-20	20-30	30-40
पुरुषों की संख्या y :	9	30	35	42