BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

00440

Term-End Examination

June, 2010

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. 1 is **compulsory**. Do **any four** questions out of Q. No. 2 to 7. Calculators are **not** allowed.*

1. Are the following statements *true* or *false* ? Give reasons for your answers : **5x2=10**

(a) The set S = [1, 2] is compact.

(b) Every continuous function is differentiable.

(c) The limit

$$\lim_{x \to 0+} (x \operatorname{cosec} x)^x \text{ exists.}$$

(d) The function f defined on R by

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ when } x \text{ is rational} \\ 0, \text{ when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is integrable on $[-2, 3]$

(e) The set

$$X = \{\sqrt{p} : p \text{ is a postive prime number}\}$$

contains a rational number.

2. (a) Determine the local minimum and local maximum values of the function f defined by $f(x) = 3-5x^3+5x^4-x^5$. 4

(b) Draw the graph of the function f given by $f(x) = |5-x| + |x-3|;\ x \in [2, 6]$. 3
Use the graph to find the points where the function fails to be differentiable.

(c) Find the limit as $n \to \infty$, of the sum 3

$$\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2^2} + \frac{n+3}{n^2+3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}.$$

3. (a) Test the following series for convergence, 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x > 0$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n^4+4} - \sqrt{n^4-4}\right]$

(b) State the second mean value theorem. Verify it for the functions $f(x) = x$ and $g(x) = \sin x$ in the interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 5

4. (a) Check whether the sequence $\{f_n\}$ where 4

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ is uniformly convergent or not on $[0, k]$ where $0 < k < 1$.

(b) State the Carichy's general principle of convergence for sequences. Check whether the sequence $\{a_n\}$, where 3

$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n-1}$

is convergent or not

(c) Show that $R_n(x)$, the Lagrange's form of remainder in the Maclaurin series expansion of e^{2x}, tends to zero as $n \to \infty$. Hence obtain the Maclaurin's infinite expansion for e^{2x}. 3

5. (a) Find the upper and lower Riemann integrals for the function $f(x) = x$ in $[0, 1]$. 5

(b) State Bulzano-Weierstrass. Theorem. Verify it for the following sets : 5

(i) Set of integers

(ii) Interval $[2, \infty[$.

6. (a) Determine the points of discontinuity of the function f and the nature of discontinuity at each of those points : 5

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{when } x \leq 0 \\ 4-5x, & \text{when } 0 < x \leq 1 \\ 3x-4x^2, & \text{when } 1 < x \leq 2 \\ -12x+2x, & \text{when } x > 2 \end{cases}$$

Also check whether the function f is derivable at $x = 1$

(b) Find the following limit 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$$

(c) Check whether the intervals $]\, 3, 7\,]$ and $[\, 8, 12\, [$ are equivalent or not. 2

7. (a) Prove that the complement of every open set is closed. 3

(b) Check, whether the sequence $\{a_n\}$ where 3

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n} \quad \text{is}$$

convergent or not.

(c) Write the inequality $4 \leq 2x + 3 \leq 6$ in the modulus form. 2

(d) Check whether the equation 2

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

has a real root between 2 and 3.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

गणित

एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 1 करना ज़रूरी हैं। प्रश्न सं 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्न कीजिए। केलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन ***सत्य*** है या ***असत्य*** अपने उत्तर के कारण दीजिए। **5x2=10**

(a) समुच्चय S = [1, 2] संहत है।

(b) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है।

(c) $\lim\limits_{x \to 0+} (x \operatorname{cosec} x)^x$ का अस्तित्व होता है।

(d) R पर निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन f

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय हो} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$$

[−2, 3] समाकलनीय है।

(e) समुच्चय

$$X = \left\{ \sqrt{p} : p \text{ एक धनात्मक अभाज्य संख्या है} \right\}$$

में एक परिमेय संख्या समाविष्ट है।

2. (a) $f(x) = 3-5x^3+5x^4-x^5$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानिक न्यूनतम और स्थानिक अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 4

(b) $f(x) = |5-x| + |x-3|; \quad x \in [2, 6]$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख बनाइए। जहाँ फलन अवफलनीय नहीं होता उन बिन्दुओं को ज्ञात करने के लिए आलेख का प्रयोग कीजिए। 3

(c) योगफल 3

$$\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2^2} + \frac{n+3}{n^2+3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}.$$

की $n \to \infty$ के रूप में सीमा ज्ञात कीजिए।

3. (a) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए। 5

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \ x > 0$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n^4+4} - \sqrt{n^4-4}\right]$

(b) द्वितीय माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए। अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलनों $f(x)=x$ और $g(x)=\sin x$ के लिए इसे सत्यापित कीजिए। 5

4. (a) जाँच कीजिए कि $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{f_n\}$, $[0, k]$ जहाँ $0 < k < 1$ पर, एकसमानतः अभिसारी है या नहीं। 4

(b) अनुक्रमों के लिए कौशी के व्यापक अभिसरण नियम का कथन दीजिए। जाँच कीजिए कि 3

$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n-1}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{a_n\}$ अभिसारी है या नहीं।

(c) दिखइए कि $R_n(x)$, जो e^{2x} का मैकलारिन श्रेणी प्रसार का लंग्राज रूप अवशेष है शून्य की ओर प्रवृत्र करता है, जबकि $n \to \infty$ होता है। इस तरह e^{2x} का मैक्लोरिन का अनंत प्रसार ज्ञात कीजिए। 3

5. (a) $[0, 1]$ में फलन $f(x) = x$ के लिए उपरि और निम्न रीमेन समाकल ज्ञात कीजिए। 5

(b) बुलजानों-वायर्स्ट्रास प्रमेय का कथन दीजिए। निम्नलिखित समुच्चयों के लिए इसे सत्यापित कीजिए : 5

(i) पूर्णांक समुच्चक

(ii) अन्तराल $[2, \infty[$.

6. (a) फलन f के असांतत्य बिन्दु और प्रत्येक असांत्य का प्रका भी ज्ञात कीजिए : 5

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{जब } x \le 0 \\ 4-5x, & \text{जब } 0 < x \le 1 \\ 3x-4x^2, & \text{जब } 1 < x \le 2 \\ -12x+2x, & \text{जब } x > 2 \end{cases}$$

यह भी जाँच कीजिए कि फलन f, $x = 1$ पर अवकलनीय है या नहीं।

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ ज्ञात कीजिए। 3

(c) जाँच कीजिए कि अन्तराल] 3, 7] और [8, 12 [तुल्य हैं या नहीं। 2

7. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक विवृत्त समुच्चय का पूरक संवृत्त होता है। 3

(b) जाँच कीजिए कि 3

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n}$$

द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{a_n\}$ अभिसारी है या नहीं।

(c) असमिका $4 \le 2x + 3 \le 6$ को मापांक रूप में लिखिए। 2

(d) जाँच कीजिए कि 2 और 3 के बीच समीकरण $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$ का वास्तविक मूल है या नहीं। 2