No. of Printed Pages : **8**

MTE-2

04943

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-2 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : ***Question no. 7 is compulsory.*** *Attempt* ***any four*** *questions from questions* **1** *to* **6**. **No** *calculators are allowed.*

---

1. (a) Let P_3 be the set of all polynomials with real coefficients and of degree at most 3. Show that $W = \{p(x) \epsilon P_3 | p(1) = 0\}$ is a subspace of P_3. Also find a basis of W containing $(1 - x^3)$. **4**

(b) Show that if T is a linear operator on an n-dimensional vector space V and is such that $T^2 = \mathbf{0}$, then R (T) $\subseteq$ Ker (T). Use this fact and the rank-nullity theorem to show that rank $T \leq n/2$. **4**

(c) Show that if the vectors u_1, u_2, and u_3 are linearly independent, then so are $u_1 + u_2$, $u_2 + u_3$, $u_3 + u_1$. **2**

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be a mapping defined by $T(a, b, c) = (a - b + 2c, 2a + b, a + 2b - 3c)$. Show that T is a linear transformation. Find its range and kernel. **4**

(b) Check whether $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ is diagonalisable or not. **4**

(c) Give an example with justification of an inner product on $\mathbf{C}^2$ which is not the standard inner product. **2**

3. (a) Complete the set $\{ (1, -1, 1), (0, 1, 0) \}$ to form a basis of $\mathbf{R}^3$. Convert this basis into an orthonormal basis with respect to the standard inner product using the Gram - Schmidt orthogonalisation process. **5**

(b) Check whether the following system of equations can be solved using Gamer's rule. If it can, use the rule to solve it. **5**

$$x + 2y + z = 6$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$x + y = 2$$

If the system above cannot be solved by Gamer's rule, solve it using the Gaussian elimination method.

4. (a) Write the matrix of the linear transformation given by $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ such that $T(a, b, c) = (a + 2b + 2c, 2a + 3b + 4c)$ with respect to the bases $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -2, 1)\}$ and $\{(1, 2), (2, 3)\}$. **3**

(b) Give an example of two 2×2 real matrices having the same characteristic polynomial but different minimal polynomials. **3**

(c) (i) Show that the operation $*$, defined on the set of real numbers $\mathbf{R}$ by $a * b = \mathbf{a^2 b}$, is a binary operation. **4**

(ii) Check whether it is associative and commutative.

(iii) What is the identity element ?

(iv) Which elements of $\mathbf{R}$ have an inverse under this operation ?

5. (a) Find the coordinate transformations that reduce the quadratic form $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$ to its normal canonical form. **7**

(b) Find the radius of the circular section of the sphere $|\boldsymbol{r}| = 15$ by the plane $\boldsymbol{r}.\ (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = 12\sqrt{3}$. **3**

6\. (a) Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. **5**

(b) Let A be an $n \times n$ matrix over $\mathbf{C}$. Show that A is unitary if and only if the rows of A form an orthonormal basis of $\mathbf{C}^n$ under the standard inner product on $\mathbf{C}^n$. **3**

(c) If all the eigen values of a 3×3 matrix are zero, show that $A^3 = \mathbf{0}$. **2**

7\. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or by a counter example. **10**

(a) If U and W are 3 – dimensional subspaces of a 5-dimensional vector space, then $U \cap W$ has at least one non-zero vector.

(b) An invertible matrix can have zero as an eigen value.

(c) The sum of two non-diagonalisable $n \times n$ matrices can be diagonalisable.

(d) There is no linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ that satisfies $\dim R(T) = 3$.

(e) The domain of f, defined by $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 5}}$, is $\mathbf{R} \setminus \{\pm \sqrt{5}\}$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-2 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7 करना ज़रूरी है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. (a) मान लीजिए P_3 वास्तविक गुणांकों और अधिक से अधिक तीन घात वाले सभी बहुपदों का समुच्चय है। दिखाइए कि $W = \{p(x) \epsilon P_3 | p(1) = 0\}$, P_3 का एक उपसमुच्चय है। W का ऐसा आधार भी ज्ञात कीजिए जिसमें $(1-x^3)$ है। **4**

(b) दिखाइए कि यदि T, n-विमीय सदिश समष्टि V पर रैखिक संकारक है और जिसके लिए $T^2 = 0$, तब $R(T) \subseteq Ker(T)$। इस तथ्य और जाति-शून्यता प्रमेय का प्रयोग करते हुए दिखाइए कि जाति $T \leq n/2$। **4**

(c) दिखाइए कि यदि सदिश u_1, u_2, और u_3 रैखिकतः आश्रित हैं, तब $u_1+u_2, u_2+u_3, u_3+u_1$ भी रैखिकतः आश्रित होंगे। **2**

2. (a) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, T **4**

$(a, b, c) = (a - b + 2c,\ 2a + b,\ a + 2b - 3c)$

द्वारा परिभाषित फलन है। दिखाइए कि T एक रैखिक रूपांतरण है। इसकी परिसर और अष्टि ज्ञात कीजिए।

(b) जाँच कीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय हैं या नहीं। **4**

(c) $\mathbf{C}^2$ पर एक ऐसे आंतर गुणनफल का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए जो मानक आंतर गुणनफल नहीं है। **2**

3. (a) $\mathbf{R}^3$ का आधार बनाने के लिए समुच्चय $\{(1, -1, 1), (0, 1, 0)\}$ को पूरा कीजिए। ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष इस आधार को प्रसामान्य लांबिक आधार में परिवर्तन कीजिए। **5**

(b) क्या निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर नियम द्वारा हल किया जा सकता है? यदि ऐसा किया जा सकता है तो इस नियम द्वारा इसे हल कीजिए। यदि इसे क्रेमर-नियम से हल नहीं किया जा सकता है, तब इस निकाय को गाउसीय निराकरण विधि द्वारा हल कीजिए। **5**

$$x + 2y + z = 6$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$x + y = 2$$

4. (a) आधारों $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -2, 1)\}$ और $\{(1, 2), (2, 3)\}$. के सापेक्ष $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$: 3

$$T(a, b, c) = (a + 2b + 2c, 2a + 3b + 4c)$$

द्वारा दिए गए रैखिक रूपांतरण का आव्यूह लिखिए।

(b) ऐसे दो 2×2 वास्तविक आव्यूहों का उदाहरण दीजिए जिनका अभिलक्षणिक बहुपद समान हो लेकिन अल्पिष्ठ बहुपद अलग हो। 3

(c) (i) दिखाइए कि $a*b = a^2 b$ द्वारा परिभाषित संक्रिया * वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** पर द्वि-आधारी संक्रिया है। 4

(ii) जाँच कीजिए कि यह क्रमविनिमेय या सहचारी है या नहीं।

(iii) इसका तत्समक अवयव क्या है?

(iv) इस संक्रिया के सापेक्ष **R** के किन अवयवों का व्युत्क्रम है?

5. (a) ऐसे निर्देशांक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो द्विघाती समघात $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$ को इसके प्रसामान्य विहित रूप में समानीत करते हैं। 7

(b) समतल $r.(i + j + k) = 12\sqrt{3}$ द्वारा गोले $|r| = 15$ के वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 3

6. (a) आव्यूह : $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। **5**

(b) मान लीजिए A, C पर $n \times n$ आव्यूह है। दिखाइए कि A ऐकिक है यदि और केवल यदि A की पंक्तियाँ $\mathbf{C}^n$ पर मानक आंतर गुणनफल के अधीन $\mathbf{C}^n$ का प्रसामान्य लांबिक आधार बनाती है। **3**

(c) यदि किसी 3×3 आव्यूह के सभी आइगोनमान शून्य हैं, तब दिखाइए कि $A^3 = \mathbf{0}$. **2**

7. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य। लघु उपपत्ति या प्रति उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **10**

(a) यदि U और W एक 5 - विमीय सदिश समष्टि की 3 - विमीय उपसमष्टियाँ है, तब $U \cap W$ का कम से कम एक शून्येतर सदिश होगा।

(b) व्युत्क्रमणीय आव्यूह का आइगेनमान शून्य हो सकता है।

(c) दो अविकर्णनीय $n \times n$ आव्यूहों का योगफल विकर्णनीय हो सकता है।

(d) ऐसा कोई भी रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ नहीं है जो $\dim R(T) = 3$ को संतुष्ट करता है।

(e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 5}}$, द्वारा परिभाषित f का प्रांत $\mathbf{R} \setminus \{\pm \sqrt{5}\}$ है।