01951

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Do any **four** questions out of **2** to **7**. Calculators are **not** allowed.*

1. Which of the following statements are **true** and which are **false** ? Give reasons for your answer. **5x2=10**

(a) The optimality criteria for the maximization and minimization problems are different in the simplex method.

(b) If the primal LPP has an unrestricted variable the dual LPP will have an equality constraint.

(c) In an optimal solution of any balance transportation problem with 3 sources and 3 destinations, there are at least 6 routes over which a positive quantity is being transported.

(d) In a two-person zero-sum game, if the optimal solution requires one player to use a pure strategy, the other player must also use a pure strategy.

(e) For any two square matrices A and B, $AB = BA$.

2. (a) A toy company manufactures two types of dolls, a basic version, doll A, and a deluxe version, doll B. Each doll of type B takes twice as long as to produce as one of type A, and the company would have time to make a maximum of 20 dolls per day, if it produces only the basic version. The supply of plastic is sufficient to produce 15 dolls per day (both A and B combined). The deluxe version requires a fancy dress of which there are only 6 per day available. If the company makes a profit of Rs. 30 and 50 per doll, respectively on doll A and B; how many of each should be produced per day in order to maximize profit ? Formulate this problem as an LPP and solve it by graphical method. **6**

(b) Write the mathematical model of the following transportation problem. **4**

		Destination			
		D_1	D_2	D_3	Availability
Origin	O_1	5	7	2	25
	O_2	3	6	5	35
	O_3	1	12	4	40
Requirement		30	28	42	

Also find an initial basic feasible solution to the problem using North-West corner method.

3. (a) Using simplex method solve the LPP **7**

$\max Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$

subject to

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Show that the set $S\ \{(x, y) : xy \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ is not convex. **3**

4. (a) Write the dual (D) of the following LPP 6

(P) Min $2x_2 + 5x_3$

subject to $x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Check whether $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ is a feasible solution to (P) and $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}\right)$ is a feasible solution to D. Without solving (P) or (D), check whether $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ is an optimal solution to the primal problem (P) and $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}\right)$ is an optimal solution to the dual problem (D).

(b) Formulate a linear programming model for the maximising player A of the following game : 4

		Player B		
		I	II	III
Player A	I	8	2	−3
	II	6	5	4
	III	0	−8	12

5. (a) A manufacturer wants to send 8 loads of his product as shown below. The matrix gives the distance (in miles) from origin 'O' to destination 'D' 6

Origin		Destination A	B	C	Availability
	X	5	1	7	1
	Y	6	4	6	3
	Z	3	2	5	4
Requirement		3	3	2	8

Find an optimal transportation schedule for minimising the mileage, starting from an initial basic feasible solution by matrix minima method.

(b) Suppose player A and player B each have two coins, one of Rs. 2 and one of Rs. 5. Player A and player B choose one coin each. If the sum of the coin values is even, then player A wins player B's coin and if the sum of the value is odd, then player B wins player A's coin. Formulate this as a two person game. Also find the optimal strategies for the two players and the value of the game. 4

6. (a) Solve the cost maximising assignment problem whose cost matrix is given by : 6

	A	B	C	D
I	42	30	30	24
II	35	25	25	20
III	28	20	20	16
IV	21	15	15	12

(b) Find all the basic solutions of the following system : 4

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Which of the solutions are feasible ? Justify your answer.

7. (a) For what values of k are the following vectors linearly independent ? 5

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) A soft drink company A has two products and its rival B has three products. Both the companies have calculated the impact of additional advertisement for any of their products on the sales of that product and on the sales of the products of their rival. The data is given below : 5

		B		
		I	II	III
A	I	6	7	15
	II	20	12	10

Treating the problem of finding the optimal advertising strategies as a problem in game theory, solve the problem by graphical method.

एम.टी.ई.-12

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

*नोट : कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है। प्र. सं. 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन **सत्य** हैं और कौन-से **असत्य**? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। **5x2=10**

   (a) एकधा विधि में अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण समस्याओं के लिए इष्टतमत्व निकष भिन्न-भिन्न होते हैं।

   (b) यदि आद्य LPP में एक अप्रतिबंधित चर होता है तो द्वैत LPP में एक समिका व्यवरोध होगा।

   (c) किसी भी 3 स्रोतों और 3 गंतव्यों वाली संतुलित परिवहन समस्या के इष्टतम हल में, कम से कम 6 रास्ते होते हैं जिनसे एक धनात्मक मात्रा का परिवहन किया जाता है।

(d) एक द्वि-व्यक्ति शून्य-योगफल खेल में, यदि इष्टतम हल के अनुसार यदि एक खिलाड़ी सविकल्प युक्ति का प्रयोग करता है तो दूसरे खिलाड़ी को भी सविकल्प युक्ति का प्रयोग करना होगा।

(e) किन्हीं दो वर्ग आव्यूहों A और B, के लिए $AB = BA$.

2. (a) एक खिलौने बनाने वाली कम्पनी दो प्रकार की गुड़िया एक साधारण प्रकार की गुड़िया A, और दूसरी डीलक्स प्रकार की गुड़िया B, बनाती है। B प्रकार की प्रत्येक गुड़िया को बनाने में, A प्रकार की प्रत्येक गुड़िया से दुगुना समय लगता है। यदि कम्पनी केवल साधारण प्रकार की गुड़िया बनाए तो वह प्रतिदिन अधिकतम 20 गुड़िया बना पाएगी। प्लास्टिक की आपूर्ति प्रतिदिन 15 गुड़िया (A और B दोनों को मिलाकर) बनाने के पर्याप्त होती है। डिलक्स प्रकार (B प्रकार की गुड़िया) के लिए विशेष प्रकार की वेशभूषा की ज़रूरत होती है और प्रतिदिन केवल 6 वेशभूषाएँ ही उपलब्ध हो पाती है। यदि कम्पनी की A और B प्रकार की गुड़िया पर क्रमशः 30 रु. और 50 रु. का लाभ होता है, तो अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार की कितनी गुड़िया बनानी होंगी? इस समस्या को LPP की रूप में सूत्रित कीजिए और ग्राफ़ीय विधि से हल कीजिए। 6

(b) निम्नलिखित परिवहन समस्या का गणितीय निदर्श लिखिए : 4

		गंतव्य			
		D_1	D_2	D_3	उपलब्धता
स्रोत	O_1	5	7	2	25
	O_2	3	6	5	35
	O_3	1	12	4	40
आवश्यकता		30	28	42	

उत्तर-पश्चिम कोना विधि से इस समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल भी प्राप्त कीजिए।

3. (a) एकधा विधि से निम्नलिखित LPP को हल कीजिए : 7

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए।

जबकि

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) दिखाइए कि समुच्चय $S\{(x, y) : xy \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ 3
अवमुख नहीं है।

4. (a) निम्नलिखित LPP का द्वैती (D) लिखिए : 6

(P) $2x_2 + 5x_3$ का न्यूनतमीकरण कीजिए

जबकि $x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

जाँच कीजिए कि क्या $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, (P) का सुसंगत हल और $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}\right)$, (D) का सुसंगत हल है। (P) या (D), को हल किए बिना, जाँच कीजिए कि $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ आद्य समस्या (P) का इष्टतम हल और $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}\right)$ द्वैती समस्या (D) का इष्टतम हल है या नहीं।

(b) निम्नलिखित खेल के अधिकतमकारी खिलाड़ी A के लिए रैखिक प्रोग्रामन निदर्श सूत्रित कीजिए : 4

		खिलाड़ी B		
		I	II	III
खिलाड़ी A	I	8	2	-3
	II	6	5	4
	III	0	-8	12

5. (a) एक निर्माता निम्नानुसार अपने उत्पाद की 8 खेप भेजना चाहता है। आव्यूह में स्रोत 'O' से गंतव्य 'D' तक की दूरी (मीलों में) दी गई है। 6

गंतव्य

स्रोत	A	B	C	उपलब्धता
X	5	1	7	1
Y	6	4	6	3
Z	3	2	5	4
आवश्यकता	3	3	2	8

आव्यूह न्यूनतम विधि से प्राप्त प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल से प्रारंभ करके मील-संख्या को न्यूनतम करने वाली इष्टतम परिवहन अनुसूची ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए खिलाड़ी A और खिलाड़ी B, प्रत्येक के पास दो सिक्के हैं। इनमें से एक सिक्का 2 रु. का और एक 5 रु. का सिक्का है। खिलाड़ी A और खिलाड़ी B एक-एक सिक्का चुनता है। यदि चुने गए सिक्के के मानों का योगफल सम होगा तो खिलाड़ी A खिलाड़ी B का सिक्का जीत लेता है और मान का योगफल विषम होने पर खिलाड़ी B खिलाड़ी A के सिक्का जीत लेता है। इसे द्वि-व्यक्ति खेल में सूत्रित कीजिए। दो खिलाड़ियों के लिए इष्टतम युक्तियाँ और खेल का मान भी ज्ञात कीजिए। 4

6. (a) निम्नलिखित लागत आव्यूह वाली लागत अधिकतमकारी नियतन समस्या को हल कीजिए। 6

	A	B	C	D
I	42	30	30	24
II	35	25	25	20
III	28	20	20	16
IV	21	15	15	12

(b) निम्नलिखित निकाय के सभी आधारी हल ज्ञात कीजिए : 4

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

कौन-सा आधारी हल सुसंगत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

7. (a) k के किन मानों के लिए निम्नलिखित सदिश रैखिकत: स्वतंत्र हैं? 5

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}k\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(b) साफ्ट ड्रिंक बनाने वाली कंपनी A के दो उत्पाद हैं और उसकी प्रतिद्वन्द्वी कंपनी B के तीन उत्पाद हैं। दोनों कंपनियों ने अपने किसी भी उत्पाद की बिक्रियों और अपने प्रतिद्वन्द्वी के उत्पादों की बिक्रियों पर अतिरिक्त विज्ञापन का प्रभाव ज्ञात किया। इसके आंकड़े नीचे दिए गए हैं : 5

		B		
		I	II	III
A	I	6	7	15
	II	20	12	10

इष्टतम विज्ञापन युक्तियाँ प्राप्त करने की समस्या को खेल-सिद्धांत की समस्या के रूप में लेकर इस समस्या को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।