No. of Printed Pages : 8

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

01118

MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%

Note : *Answer **any five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) The iteration method 5

$$x_{n+1}=\frac{1}{8}\left[6x_n+\frac{3N}{x_n}-\frac{x_n^{\ 3}}{N}\right], n=0,1, \ldots\ldots$$

where N is a positive constant, converges to some quantity. Determine this quantity. Also find the rate of convergence of this method.

(b) Set up the Gauss-Seidel iteration scheme in matrix form for solving the system of equations 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Does this scheme converge ? If yes, find its rate of convergence.

2. (a) Find the truncation error and the order of the method. 5

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]$$

Using this method and the Richardson's extrapolation, obtain the best value of $f'(2)$ from the following data :

x	2	3	4	6	10
$f(x)$	9	28	65	217	1001

(b) Evaluate $\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ using trapezoidal rule with 2 and 3 nodal points. Obtain the improved value using Romberg integration. 5

3. (a) Using the classical fourth order Runge-Kutta method, find the approximate value of $y(0.4)$ for the initial value problem 6

$y' = x^2 + xy - 2,\ y(0) = 0$

with the step size $h = 0.2$.

(b) Using Stirling's formula, find the value of $f(1.35)$ from the following table of values : 4

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	-0.87	-0.68	-0.43	-0.12	0.25

4. (a) Find the approximate value of $y(1, 1)$, $y\,(1,2)$ and $y(1, 3)$ as solutions of the differential equation. **5**

$$\frac{dy}{dx}=x+y^2,\ y(1)=0.2$$

using Euler's method with step size $h=0.1$

(b) Using the Gauss-elimination method with partial pivoting, find the solution of the system of equations **5**

$$2x+3y+4z=-5$$

$$x+4y-z=9$$

$$4x-y+2z=1.$$

5. (a) Show that **3+2**

(i) $$\Delta\left(\frac{f_k}{g_k}\right)=\frac{g_k\,\Delta f_k-f_k\,\Delta g_k}{g_k\,g_{k+1}}$$

(ii) $$\Delta+\nabla=\frac{\Delta}{\nabla}-\frac{\nabla}{\Delta}$$

where Δ and ∇ are the forward and the backward difference operators, respectively.

(b) The error equation of an iterative method to determine a simple root of the equation $f\,(x)=0$ is given by $\Sigma_{n+1}=C\,\Sigma_n\,\Sigma_{n-1}$, where C is a constant. Find the order of the method. **5**

6. (a) Using the third order Taylor series method find approximate value of $y(2.\ 2)$ as a solution of $x^2y^1 = x^2 + y^2$, $y(2) = 1$, $h = 0.2$. 5

(b) Estimate the eigen values of the matrix 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

using the Gershgorin bounds. Draw a rough sketch of the region where the eigen values lie.

7. (a) Find an internal of unit length which contains the negative real root of $f\ (x) = 8x^3 - x + 3 = 0$. Construct a fixed point iteration $x = g(x)$, which converges. Verify the condition of convergence. Take the mid-point of this interval as a starting approximation and iterate once. 6

(b) If $f\ (x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$, then compute divided differences 4

$f\,[-2, 1, 0, 3, 4]$ and $f\,[-2,\ -1, 0, 1, 2, 3]$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकरित किए जा सकते है। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. (a) पुनरावृत्ति विधि 5

$$x_{n+1}=\frac{1}{8}\left[6xn+\frac{3N}{x_n}-\frac{{x_n}^3}{N}\right], n=0, 1, ...$$

जहाँ N एक घन अचर है, एक परिमाण की ओर अभिसरित होती है। यह परिमाण ज्ञात कीजिए। इस विधि की अभिसरण दर भी ज्ञात कीजिए।

(b) समीकरण निकाय 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए आव्यूह रूप में गाउस-सीडल पुनरावृति योजना स्थापित कीजिए। क्या यह योजना अभिसारी है? यदि हाँ, तो इस की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

2. (a) विधि **5**

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

की रुडन त्रुटि और कोटि ज्ञात कीजिए। इस विधि और रिचर्डसन बहिर्वेशन का प्रयोग करके निम्नलिखित आंकड़ों के लिए $f'(2)$ का सर्वोत्तम मान ज्ञात कीजिए।

x	2	3	4	6	10
$f(x)$	9	28	65	217	1001

(b) 2 और 3 सोपान बिन्दु लेकर समलंबी नियम द्वारा **5**

$\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ का मान ज्ञात कीजिए। राम्बर्ग समाकलन द्वारा परिणाम में सुधार लाइए।

3. (a) सोपान लंबाई $h=0.2$ लेकर चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रूंगा-कुट्टा विधि से आदि मान समस्या **6**

$y'=x^2+xy-2,\ y(0)=0$

के लिए $y(0.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

(b) स्टर्लिंग सूत्र से निम्नलिखित तालिका मान से $f(1.35)$ का मान ज्ञात कीजिए। **4**

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	– 0.87	– 0.68	– 0.43	– 0.12	0.25

4. (a) सोपान लंबाई $h=0.1$ के लिए आयलर विधि का प्रयोग करके अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=x+y^2$, $y(1)=0.2$ के हलों के रूप में $y(1, 1)$, $y(1,2)$ और $y(1, 3)$ के सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

(b) आंशिक कीलकन द्वारा गाउस-विलोपन विधि से समीकरण निकाय 5

$2x+3y+4z=-5$

$x+4y-z=9$

$4x-y+2z=1.$

का हल ज्ञात कीजिए।

5. (a) दिखाइए कि 3+2

(i) $\Delta\left(\frac{f_k}{g_k}\right)=\frac{g_k\,\Delta f_k - f_k\,\Delta g_k}{g_k\,g_{k+1}}$

(ii) $\Delta+\nabla=\frac{\Delta}{\nabla}-\frac{\nabla}{\Delta}$

जहाँ Δ और ∇ क्रमशः अग्रांतर और पश्चांतर अंतर संकारक हैं।

(b) समीकरण $f(x)=0$ के सरल मूल को प्राप्त करने के लिए पुनरावृत्ति विधि के त्रुटि समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है $\Sigma_{n+1}=C\,\Sigma_n\,\Sigma_{n-1}$, जहाँ C एक अचर है। विधि की कोटि ज्ञात कीजिए। 5

6. (a) तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि से $x^2y^1 = x^2 + y^2$, $y(2) = 1, h = 0.2$ के हल के रूप में $y(2, 2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

(b) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यूह 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए। जहाँ आइगेन मान स्थित हैं उस प्रदेश का स्थूल चित्र बनाइए।

7. (a) एकक लंबाई का वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 8x^3 - x + 3 = 0$ का ऋणात्मक वास्तविक मूल आविष्ट हो। नियत बिंदु पुनरावृत्रि $x = g(x)$ लिखिए जो अभिसरित होती है। अभिसरण प्रतिबंध की जाँच कीजिए। इस अंतराल के मध्य-बिंदु को आदि सन्निकटन मानकर, एक पुनरावृत्रि कीजिए। 6

(b) यदि $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$, तब विभाजित अंतर $f[-2, 1, 0, 3, 4]$ और $f[-2, -1, 0, 1, 2, 3]$ ज्ञात कीजिए। 4