BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

00556

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-1 : CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question **no. 1** is **compulsory**. Solve **any four** questions from questions no. 2 to 7. The use of calculator is **not** allowed.*

1. Which of the following statements are ***true*** ? **10**
Justify your answers.

(a) The function f, defined by $f(x) = (x-7)(x^3+11)$, is an odd function.

(b) $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{\pi/2} e^{2\cos t}\, dt\right] = -2xe^{2(\cos x^2)}$

(c) $y = \sin x$ is monotonic on $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$.

(d) If $f(x) = 2|x-1|$, $g(x) = 3x-10$, then $fog(1) = 12$.

(e) Every curve over **R** has a point of inflection.

2. (a) Find the approximate value of the area between the curve $y=x^2+1$, the x-axis, the y-axis and $x=4$, using Simpson's Rule with 8 equal subdivision. Also find the difference between the exact value and the approximate value. 5

(b) Verify Rolle's Theorem for f on $[-1, 1]$, defined by $f(x)=x^4-4x^2+7$. 3

(c) Check whether the function 2

$$f:[0,\pi]\to\mathbf{R}: f(x)=\begin{cases}\tan x, & x\neq\frac{\pi}{2}\\ 1, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

is integrable or not on $[0, \pi]$.

3. (a) If $y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$, show that $x^2y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2+1)y_n=0$. 4

(b) Is the function f, defined on $\mathbf{R}$ *by* 4

$$f(x)=\begin{cases}1+2x, & x\leq 0\\ 3x-2, & 0<x\leq 1\\ 2x^2-1, & x>1\end{cases}$$

continuous on $\mathbf{R}$. Justify your answer.

(c) What is the domain of the function f, defined by $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$? 2

4. (a) Find the length of the arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ between $\theta = -\pi$ and $\theta = \pi$. 4

(b) Find the maximum height of the curve $y = 4\sin x - 3\cos x$ above the x-axis. 3

(c) Evaluate $\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$. 3

5. (a) If $I_n = \int_1^2 (\ln x)^n \, dx$ obtain an equation relating I_n with I_{n-1}, and hence evaluate I_3. 5

(b) Find the equations of the tangent and the normal to the curve $y = x^3 (x+1)$ at (1, 2). 3

(c) Find the derivative with respect to x, of the function f, defined by 2

$$f(x) = \sin\left(x^3 + 5x^2 + 7\right) + \tan\left(\frac{a}{x}\right),$$

where $a \in R$.

6. Trace the curve $y = \frac{8}{4 - x^2}$, stating all the properties used in the process. 10

7. (a) Find the approximate value of $(0.99)^{\frac{1}{3}}$ upto 4 places of decimal. 3

(b) Prove that $\int_0^{\pi/4} ln\,(1 + tanx)\,dx = \frac{\pi}{8} ln\,2.$ 3

(c) Find the volume of the solid generated by the revolution of $r = 2acos\theta$ about the initial line. 4

एम.टी.ई.-1

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-1 : कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न **सं. 1** करना **ज़रूरी** है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से **कोई चार** प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन ***सत्य*** हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। **10**

(a) $f(x) = (x-7)\,(x^3+11)$ द्वारा परिभाषित फलन f एक विषम फलन है।

(b) $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_{x^2}^{\pi/2} e^{2\cos t}\,dt\right] = -2xe^{2\left(\cos x^2\right)}$

(c) $y = \sin x$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, 0\right]$ पर एकदिष्ट है।

(d) यदि $f(x) = 2|x-1|$, $g(x) = 3x-10$, तब $fog\,(1) = 12$.

(e) **R** पर प्रत्येक वक्र का नतिपरिवर्तन बिंदु होता है।

2. (a) आठ समान उप-विभाजनों को लेकर सिम्सन नियम से वक्र $y=x^2+1$, x-अक्ष, y-अक्ष और $x=4$ के बीच के क्षेत्रफल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। सही मान और सन्निकट मान के बीच के अंतर को भी ज्ञात कीजिए। 5

(b) $[-1, 1]$ पर $f(x)=x^4-4x^2+7$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए। 3

(c) जाँच कीजिए कि फलन $f: [0, \pi] \to \mathbf{R}$: 2

$$f(x)=\begin{cases} \tan x, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$[0, \pi]$ में समाकलनीय है या नहीं।

3. (a) यदि $y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$, तब दिखाइए कि $x^2y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2+1)y_n=0$. 4

(b) क्या $$f(x)=\begin{cases} 1+2x, & x \leq 0 \\ 3x-2, & 0<x \leq 1 \\ 2x^2-1, & x>1 \end{cases}$$ 4

द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(c) $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत बताइए। 2

4. (a) $\theta=-\pi$ और $\theta=\pi$ के बीच चक्रज $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1+\cos\theta)$ के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

(b) x-अक्ष के ऊपर वक्र $y=4\sin x-3\cos x$ की अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिए। 3

(c) $\int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$ का मान निकालिए। 3

5. (a) यदि $I_n = \int_1^2 (\ln x)^n\, dx$ तब I_n को I_{n-1} से संबद्ध करता एक समीकरण प्राप्त कीजिए और इस तरह I_3 का मान निकालिए। 5

(b) (1, 2) पर वक्र $y = x^3 (x+1)$ की स्पर्शरेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

(c) $f(x) = \sin\left(x^3+5x^2+7\right) + \tan\left(\frac{a}{x}\right)$, जहाँ $a \epsilon \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए। 2

6. वक्र $y = \frac{8}{4 - x^2}$ का अनुरेखण कीजिए और साथ ही अनुरेखण में इस्तेमाल किए गए सभी गुणों को लिखिए। 10

7. (a) दशमलव के 4 स्थानों तक $(0.99)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 3

(b) सिद्ध कीजिए कि 3

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

(c) आदि रेखा के प्रति $r = 2a\cos\theta$ के घूर्णन से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 4